Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МП -11-22

Фамилия Боровик

Имя Антон

Отчество Максимович

Класс 11

Территория г Березники.

Образовательная организация МАОУ „СОШ с УИОП №3"

1	2	3	4	5	Σ
+.5 7ПБ	+.5 7ХР	+ ХР 7	− 0 5 ПБ	0 0 ПБ	21

МI-11-22

11.2.

~~Пусть~~ Множество $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots a_n\}$, а ~~в~~ множество $B = \{b_1; b_2; b_3 \dots b_n\}$.

Пусть среди ~~*~~ A и B нет числа, которое принадлежит обоим множествам. Тогда все числа $a_1; a_2; a_3 \; a_n; b_1; b_2; b_3 \dots b_n$ — различные. ~~(Обозначим max — наибольшее среди этих чисел, а min — наименьшее)~~

$S_{A+B} = 2n^2$ — сумма чисел множеств A и B

Тогда $S_{A+B} \geq 1+2+3+\dots+2n = 2n \cdot \frac{1+2n}{2} = (2n+1)n$
т.к. $a_1; a_2 \dots a_n; b_1; b_2 \dots b_n$ — натуральные и различные.

$S_{A+B} = 2n^2 \geq n(2n+1)$

$2n \geq 2n+1$

$0 \geq 1$

противоречие => допущение неверно

=> среди множеств A и B есть такое число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

11.1

a и b — наибольшие числа; $a > b$.
c и d — наименьшие; $d < c$

а если a, b и c, d частично совпадают

$a \cdot b = 77$

$\begin{cases} a = 11 \\ b = 7 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 77 \\ b = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -1 \\ b = -77 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -7 \\ b = -11 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c = -1 \\ d = -77 \end{cases} \\ \begin{cases} c = -7 \\ d = -11 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c = -1 \\ d = -77 \end{cases} \\ \begin{cases} c = -7 \\ d = -11 \end{cases} \end{array}\right.$

$c; d < -77$
$\Rightarrow c \cdot d \geq 78 \cdot 79$
$c \cdot d = 77$ по усл.
=> реш нет.

$c; d < -11 \Rightarrow c \cdot d \geq 12 \cdot 13 = 156$
$c \cdot d = 77$ по усл.
решений нет, ~~т.к. c; d ∈ Z~~.

Запишем эти числа в порядке возрастания.

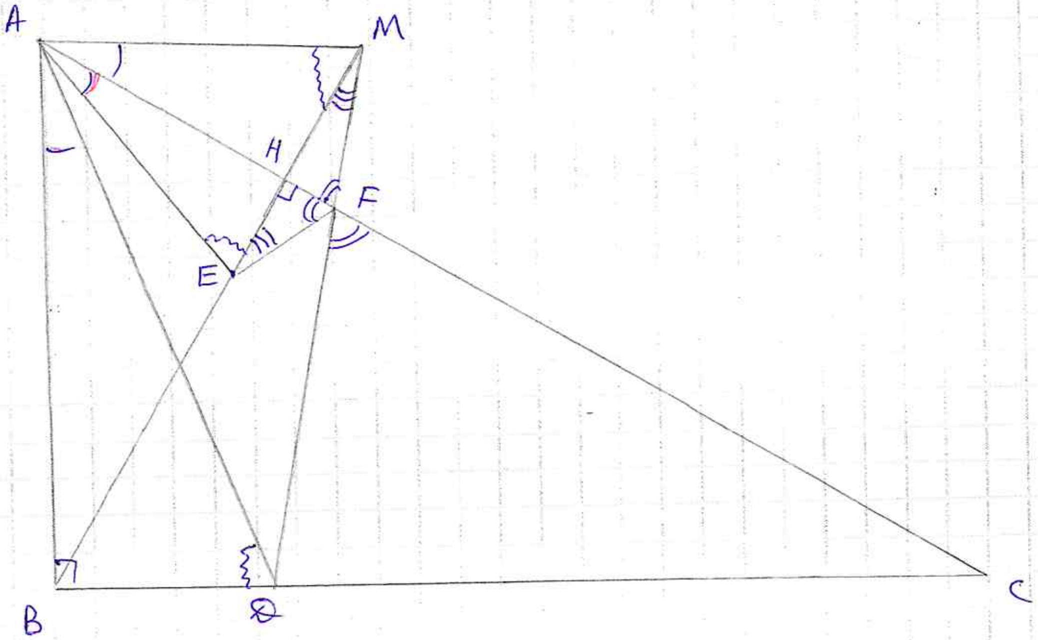
$d; c; \underbrace{k_1; k_2 \dots k_{n-4}}; b; a$.

максимум $b-c-1$ чисел => n наиб. при наибольшем значении $b-c-1$
т.к. числа целые и разл.

=> при наибольшем b и наименьшем c;
=> $b = 7$; $c = -7$. $n = b - c - 1 + 4 = 17$

Ответ: $n = 17$. Числа: $-11; -7; -6; -5 \dots 5; 6; 7; 11$.

11. 3.



$D F \cap BH = \cdot M$; $\angle MFH = \angle CFD$ вертикальные

$\Rightarrow \triangle MFE$ р/б; FH – высота и бис. $\Rightarrow \cdot H$ – сер. ME

$\Rightarrow \triangle AME$ р/б $\Rightarrow$ ~~AH-бис~~ $\angle AME = \angle AEM$.

$\triangle AHE \sim \triangle ADB$ по острому углу. $(\angle HAE = \angle DAB)$ +

$\Rightarrow \angle ADB = \angle AEM$; $\angle ADB = \angle AME$.

$\Rightarrow$ около $AMDB$ можно описать окр $(\cdot O; R)$

$\angle BMD = \angle DAB$ опираются на одну дугу $\overline{BD}$

$\angle BMD + \angle MFH = 90^\circ \Rightarrow \angle HAE + \angle AFE = 90^\circ$.

$\Rightarrow \triangle AFE$; $\angle AEF = 180^\circ - \angle HAE - \angle AFE = 90^\circ$.

11.4. ~~y – наибольшее целое число, меньшее $p/2$.~~

~~Тогда $py+1$ и y – взаимнопростые.~~

~~Пусть есть такие m и n, что $m \cdot n = py+1$~~ ~~$m > p/2$, $n > y$ $\Rightarrow$ $n > p/2$~~

p и $(py+1)$ – взаимнопростые числа.

y и $(py+1)$ – взаимнопростые числа.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

10:53 - 10:57
12:23 - 12:27

11 - 2 - 11 - 08

Фамилия Боровик

Имя Антон

Отчество Максимович

Класс 11

Территория г. Березники

Образовательная организация МАОУ „СОШ с УИОП № 3"

~~@ ...~~ М-2-11-08

11.6.

1) $(x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$

2) $(x^3+x^2+x+1)(x+1) = x^4+x^3+x^2+x + x^3+x^2+x+1 = x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

3) $(x^4+2x^3+2x^2+2x+1) - (x^4+1) = 2x^3+2x^2+2x = 2x(\underbrace{x^2+x+1}_{>0})$ почему?

$2x(x^2+x+1) \geq 0$ при $x \in [0;+\infty)$
< 0 при $x \in (-\infty; 0)$

6	7	8	9	10	Σ
∓ Хр	∓	0	0	−	
5	7	0 Хр	0 Хр	0	12

11.7. Да, можно.

Пример: 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

После 8 раскрашиваем числа по порядку (9, 10, 11, 12 ...) (в квадратики и ~~кружо~~ круги) следующим образом:

если это степень двойки – то в круг.

если число не степень двойки, тогда из ближайшего числа, которое превосходит данное и является степенью двойки, вычитаем данное. Полученная разность является натуральным числом, меньшим чем данное => оно уже закрашено в какой-то цвет. почему?
Данное число закрашиваем в противоположный.

Например, следующее число 9. ~~$9 \leq 16 = 2^4$~~.

1 шаг. $8 < 9 < 16 = 2^4$

2 шаг. $16 - 9 = 5$; 5 – закрашено в ○

3 шаг. закрашиваем 9 в □

~~Док-во: ... $a \in N$, $2^k < a \leq 2^{k+1}$, $k \in N$~~

~~2^k ... a ... 2^{k+1} ...~~ $a > \frac{2^{k+1}}{2}$.

$2^{k+1} - a < \frac{2^{k+1}}{2} = 2^k$ => ~~каждое число~~

(не степень двойки)

Доказательство: пусть какое-то число $a \in N$ ~~каждое~~ противоречит этому способу, и дает в сумме с двумя уже закрашенными числами степень двойки.

$\begin{cases} a + c = 2^k \\ a + b = 2^{k+1} \end{cases}$ подряд? ; $c; b; k \in N$. ; $b < a$ т.к. они уже закрашены.

$\Rightarrow a = 2^k - c$
$a = 2^{k+1} - b \Rightarrow a < 2^k \Rightarrow b < 2^k \Rightarrow a + b < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

противоречие

$\Rightarrow$ допущение неверно $\Rightarrow$ все натуральные числа можно (не степени двойки) закрасить этим способом

~~Ответ: да, можно~~.

Пусть какое-то число a' (степень двойки)? противоречит этому способу, и дает в сумме с каким-то закрашенным числом степень двойку.

$a' + b' = 2^k$; $b'; a'; k \in N$, $b' < a'$ т.к. оно уже закрашено.

$a' = 2^k - b' \Rightarrow a' < 2^k$ ~~$\Rightarrow b < 2^k$~~

$\Downarrow$ $a' \leq 2^{k-1} = \frac{2^k}{2}$ ~~почему~~ $b' < \frac{2^k}{2}$

$\Rightarrow a' + b' < \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{2} = 2^k$

противоречие

$\Rightarrow$ допущение неверно.

Вывод: все натуральные числа можно закрасить таким способом.

почему способ работает?

Ответ: да, можно.

11.10.

Если бы Вася угадывал каждый многочлен по отдельности, то ему понадобилось бы минимум по 3 хода на каждый, т.к. по 2 точкам угадать ~~и~~ такие многочлены нельзя. Например, Вася знает, что $f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_2$, но определить по этим данным $f(x)$ нельзя, т.к это может быть или ~~...~~ линейная функция $(a=0)$ или квадратичная $(a\neq 0)$.

$\Rightarrow$ За ~~...~~ $n=4$ шага Вася не сможет угадать ни один многочлен, если Петя скажет 2 значения $f(x)$ и $2-g(x)$.

$\Rightarrow n\geq 5$.