Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI-11-29

Фамилия Буняков

Имя Михаил

Отчество Константинович

Класс 11

Территория Пермский край

Образовательная организация МАОУ „СОШ № 9 им. А.С. Пушкина"

МI-11-29

1 Рассмотрим наибольший по n пример.
В нем точно есть отрицательные и положительные числа, иначе можно добавить пару -11 / -7 или 11/7, и ~~мини~~ ~~максимум~~ условие сохранится, n увеличится на 2, ведь ~~од~~ на одно из произведений эта пара не повлияет, а другое заменит на эквивалентное.
Очевидно, что ~~меньшее~~ „меньшее" 77 получается из 2 отрицательных, а большее из двух положительных.

Для отрицательных и положительных чисел 2 варианта:

$(-11)\cdot(-7)$ $\qquad$ $11\cdot 7$

$(-77)\cdot(-1)$ $\qquad$ $77\cdot 1$

1	2	3	4	5	Σ
+б	+б	+НА	0 пе	0 пе	
7 хр	7 НА	7 д	0 НА	0 НА	21

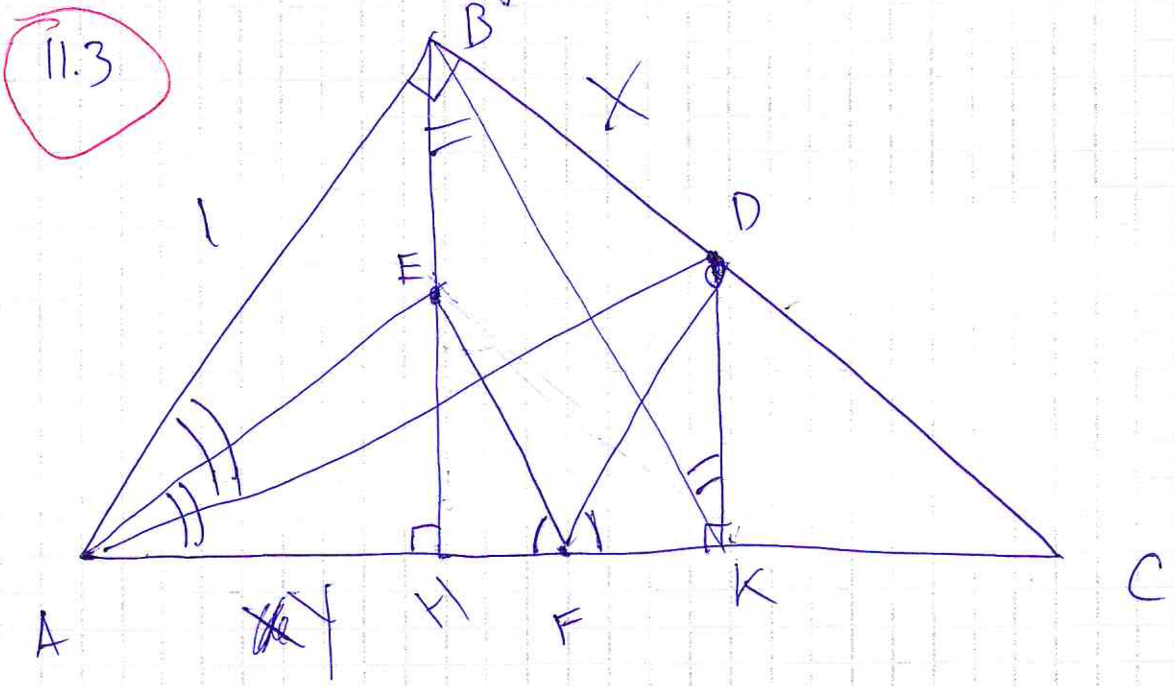
Заметим, что наличие -1 или 1 влечет отсутствие (кроме -77 и 77) чисел этого знака, (иначе -1 мы не взяли) и заменой на набор (-11, -7, -2) можно n увеличить.
Замены осуществлять корректно, поскольку чисел каждого знака хотя бы 2, следовательно ~~если про~~ одно из ~~сумм с~~ произведений „большее" или „меньшее" не ~~из~~ изменится.

* Значит, максимальный набор обязательно содержит (-11, -7, 7, 11), и следовательно ничего ~~не~~ больше
Отсюда наибольший пример - {-11, -7, -6, -5 ... 5, 6, 7, 11} (меньше -7 и больше 7)
для n = 17. Также понятно исходя из (*), что больше нельзя, поскольку все возможные числа уже взяты

11.2

Пусть это не так, тогда ~~А~~ рассмотрим $A \cup B$ из $2n$ элементов, сумма которых $2n^2$. Однако, первые $2n$ натуральных чисел имеют ~~сумму~~ наименьшую сумму среди $2n$ разных натуральных чисел, равную $\frac{2n(2n+1)}{2} > 2n^2$, противоречие, откуда равные элементы найдутся.

11.3



Опустим из D перпендикуляр DK на AC.

ABDK — описанный т.к два равных угла по 90°. +

$\angle BKD = \angle BAD$ + из описанности, $\angle HBK = DKB$ из $\parallel$ BH

$AH = y$, $AB = 1$, $BD = x$

BH по т. пифагора $\sqrt{1-y^2}$ +

$HE = xy$ + из подобия $\triangle AHE$ $\triangle ABD$ по двум углам.

Из метрических соотношений $AC = \frac{AB}{AH} = \frac{1}{y}$ +

$\triangle BHK \sim \triangle ABD$, поэтому $HK = x\sqrt{1-y^2}$ +

$DK = CK \cdot tg\angle BCA = \left(\frac{1}{y} - y \cdot x\sqrt{1-y^2}\right) \cdot ctg\angle BAH = \frac{1}{y} - y$

$\left(\frac{1}{y} - y - x\sqrt{1-y^2}\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2} - \cancel{x}y$ +

$\triangle HEF \sim \triangle DFK$, поэтому

$HF + FK = x\sqrt{1-y^2}$

$\frac{HF}{FK} = \frac{HE}{DFK} = \frac{xy}{\sqrt{1-y^2} - yx}$.

$\frac{x^2y}{x^2y + \sqrt{1-y^2} - x^2y} = \frac{xy}{\sqrt{1-y^2} - xy}$

Решая эту систему $HF = x^2y$ + подходит, ~~вида~~

$\cancel{\frac{x^2y}{x\sqrt{1-y^2}}}$ и это единственное решение.

Значит, $HF = x^2y$. Из метрических

соотношений $HE = \sqrt{HF \cdot AH}$, а это верно лишь

для прямоугольного $\triangle$, значит $\angle AEF = 90°$.

не доказано

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

11 - 2 - 11 - 05

Фамилия Буняков

Имя Михаил

Отчество Константинович

Класс 11

Территория Пермский край

Образовательная организация МАОУ „СОШ № 9 имени А.С. Пушкина"

11-2-11-05

11.6

$(x+1)*(x+1)-(x^2+1)=2x$

$x>0 \to 2x \neq 0 \quad x<0 \to 2x<0$

6	7	8	9	10	Σ
+ Хр 7Б	+ Хр 7НА	+. 6Б	− 0Б	−. 1ен	21

11.7

~~Да~~, можно.

Пусть ~~уч~~ числа вида $a=2^n \cdot p$, где $n \geq 0$, $p \equiv_4 3$ белые,

$a=2^n \cdot q$, где $n \geq 0$, $p \equiv_4 1$ черные.

Тогда для любых одноцветных ~~и~~ чисел верно, ~~а+в~~ что если ~~а+а'~~ ~~=2^m~~, ~~то~~ они ~~разно~~ сложить a и a', то не получится степень двойки:

$a=2^k \cdot p$

$a'=2^m \cdot q$, пусть $k>m$

$2^k \cdot p+2^m \cdot q = 2^m(\underbrace{2^{k-m} \cdot p+q}_{\text{нечетное}}) \neq 2^i$

почему $\neq 1$?

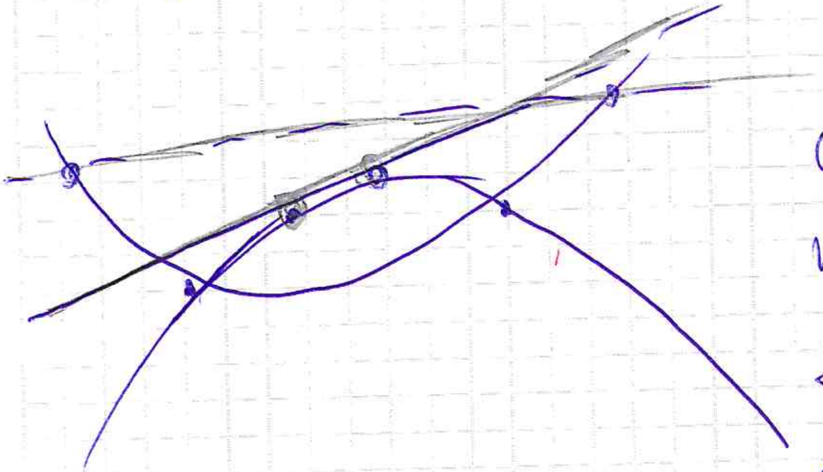
Значит $k=m$

$2^m(p+q)$ ~~$=2^m$~~; $p+q \equiv 4k+2$, если $a'+a$ – степень, то $k=0$, и значит p и $q=1$, противоречие.

Оценка 11.10

Какие ~~это~~ бы Петя не взял ~~~~ первые две точки, можно сказать, что именно через них проходят обе параболы:

А могло и не случиться.



Теперь для следующих четырёх точек назовём две, лежащие на одной параболе и две на другой.

Тогда Вася не сможет указать ни одной параболы, ведь если ~~~~ он скажет параболу кроме этих, то верны эти две. Если он скажет, что верна какая-либо из этих, то ~~оставшиеся три~~ верна другая из пары, а две прочие точки можно покрыть прямой.

НЕТ ОБОСНОВАН
ДАЖЕ ДЛЯ 6-т

Значит, нужно хотя бы 7 запросов.

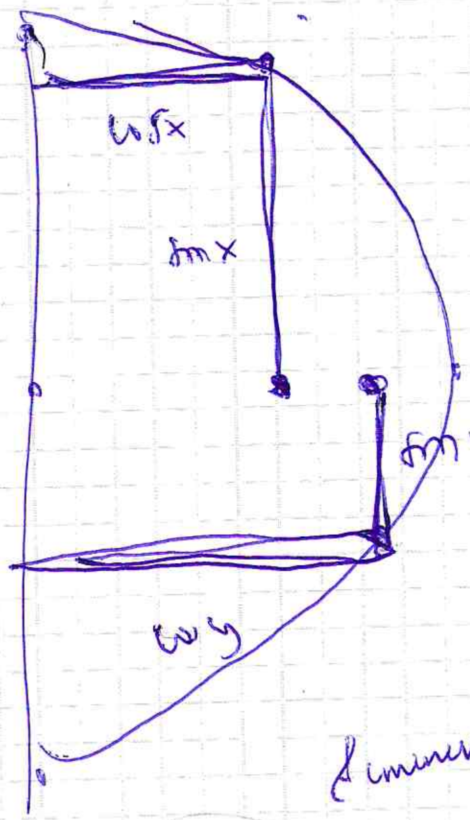
Давайте докажем, что

$$\frac{(r_1+r_2-r_3)(r_1+r_3-r_2)(r_2+r_3-r_1)}{r_1+r_2+r_3}$$

$$< \cancel{\sqrt{r_1r_2r_3}\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right.}$$

$$< 4\frac{\left(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_1r_3}\right)\left(\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_1r_2}\right)\left(\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_3}\right)}{\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_1r_3}}$$

a



xy

800 −431
710
620
611
530
521

8 штук

$$(xy+yz+zx)(x^2+z^2-y^2)(x^2+y^2-z^2)(z^2+y^2-x^2) < 4(xy+yz-xz)(..)(..)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\cancel{-x^7(z+y)\sim -x^6yz\sim -x^5y^3\sim -x^5y^2z\sim}$$

8

11.1 Пусть $\sin x+\cos y=\frac{p}{n}$, где p и $q\in N$

$\cos x+\sin y=\frac{q}{m}$, где q и $m\in N$

$\sin^2 x+2\sin x\cos y+\cos^2 y+\cos^2 x+2\cos x\sin y+\sin^2 y=\frac{p^2}{n^2}+\frac{q^2}{m^2}$

$(\sin x+\cos y)^2+(\cos x+\sin y)^2$

$\sin(x+y)=\frac{p^2}{2n^2}+\frac{q^2}{2m^2}-1$ +

$$\sin x=\frac{\sin(x+y)-\cos x\left(\frac{q}{m}-\cos x\right)}{\frac{p}{n}-\sin x}$$?

$\frac{p}{n}\sin x-\sin^2 x+\frac{q}{m}\cos x-\cos^2 x=\sin(x+y)$

$\frac{p}{n}\sin x+\frac{q}{m}\cos x=\frac{p^2}{2n^2}+\frac{q^2}{2m^2}$ $|\cdot 4m^2n^2$

~~куда это пропало~~?

$4m^2np\sin x+4n^2mq\cos x=4n^2p^2+4m^2q^2\in N$

$\in N$ $\in N$ $\in N$

M N

$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)$

$\sin x=\frac{\sin(x+y)-\cos x\sin y}{\cos y}$