Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI – 11–04

Фамилия Выгузов

Имя Артем

Отчество Андреевич

Класс 11

Территория г. Пермь, Пермский край

Образовательная организация МАОУ СОШ №9

1	2	3	4	5	Σ
+Б	+Б	−Б	−Б	−	14
7 ПЕ	7 ХР	0 ПЕ	0 ПЕ	0 ПЕ	

МI − 11 − 04

Задача 1

Ответ: 17 чисел

11, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4, −5, −6, −7, −11

Докажем от противного. Пусть на доске было написано хотя бы 18 чисел. Тогда по принципу Дирихле, либо положительных, либо отрицательных было хотя бы 9 (18 чисел (всего) − 1 число (возможно 0), т.е. хотя бы 17 ненулевых чисел)

Не умаляя общности, пусть положительных чисел было хотя бы 9.

Упорядочим эти положительные числа и заметим, что максимальное число хотя бы 9 (т.к. числа различные), а 2-ое максимальное хотя бы 8.

Но у 77 только 2 делителя, больше либо равные 8. Это числа 11, 77, но они в произведении не дают 77.

Противоречие, значит такого быть не могло, и всего чисел было не более 17.

Задача 2

Докажем от противного. Пусть все числа различны. Рассмотрим множество $C = A \cup B$

сумма всех чисел из C равна $2n^2$, т.к. это сумма всех чисел из A (n^2) и из B (n^2)

Упорядочим числа в C по возрастанию и обозначим c_1; c_2; ...; c_{2n}

Заметим, что т.к. все числа натуральны и различны, то $c_1 \geq 1$; $c_2 \geq 2$; ... $c_i \geq i$; ...; $c_{2n} \geq 2n$

Тогда $\sum_{i=1}^{2n} c_i \geq \sum_{i=1}^{2n} i = \frac{(2n+1)2n}{2} = 2n^2+n$

Но она равна $2n^2$

Противоречие. Значит предположение неверно и найдется число, принадлежащее и A, и B.

Задача 5.

Рассмотрим больше числа, упорядоченные по возрастанию ($a_1 < a_2 < \ldots < a_n$)

Заметим, что $a_1 \geq n$, т.к. в строке стоит n различных натуральных чисел, т.е. найдется число не менее n

$a_2 \geq 2n$, т.к. в 2^х строках стоит $2n$ различных натуральных чисел, т.е. найдется число хотя бы $2n$

$\vdots$

$a_i \geq in$ аналогично

$\vdots$

$a_n = n^2$, т.к. n^2 где-то стоит в таблице

Рассмотрим малые числа, упорядоченные по убыванию ($b_1 > b_2 > \ldots > b_n$)

$b_1 \le n(n-1)+1$, т.к. в столбце стоит n различных чисел, значит найдется число не более такого

$b_2 \le n(n-2)+1$, т.к. в $2^{\text{ух}}$ столбцах стоит $2n$ различных, значит найдется число не более такого

$\vdots$

НЕ ВСЕГДА

$b_i \le n(n-i)+1$ аналогично

РАССМОТРЕНЫ КОНКРЕТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАПОЛНЕН

$\vdots$

$b_n = 1$, т.к. оно где-то стоит

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \ge \sum_{i=1}^{n} in - \sum_{i=1}^{n} (n^2 - ni + 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2ni - n^2 - 1) = 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n^3 - n = \cancel{n^3} + n^2 - \cancel{n^3} - n =$$

$$= n^2 - n$$

Ответ: наименьшая разность $n^2 - n$

Если таблица

1	$n+1$	$\ldots$	n^2-n+1
2			
3	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$			
n	$2n$		n^2

то ответ

$$\sum_{i=1}^{n} (n^2 - i + 1 - n(i-1) - 1) = n^3 - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^3}{2} > \frac{n^3 - n}{2}$$

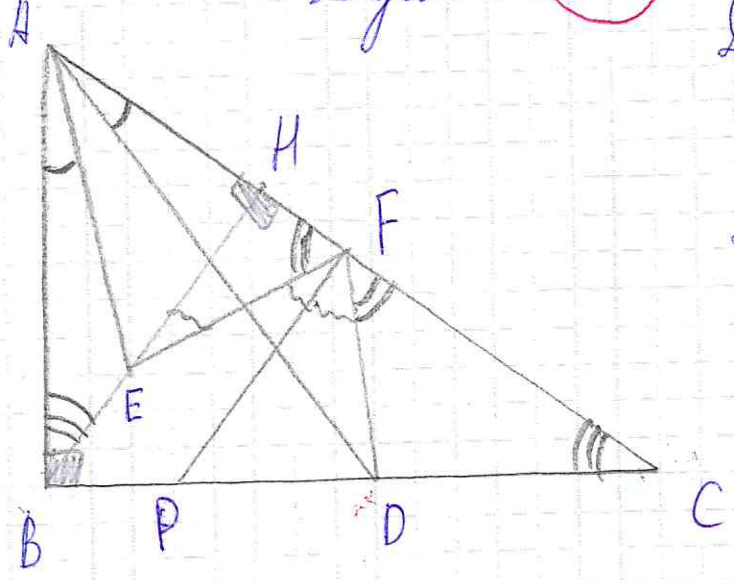
Если же таблица

1	2	3	4	$\ldots$	n
$n+1$	$n+2$		$\ldots$		$2n$
$\vdots$					
n^2-n+1			$\ldots$		n^2

то ответ

$$\sum_{i=1}^{n} (in - i) = \sum_{i=1}^{n} i(n-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$

Задача 3.



Дано: $\angle BAD = \angle CAE$

$\angle AFE = \angle CFD$

Д-ть. $\angle AEF = 90°$

Д-во: Заметим, что $\angle BAE = \angle BAC - \angle CAE$ и $\angle CAD = \angle BAC - \angle BAD$, т.е. $\angle BAE = \angle CAD$

Заметим, что $\angle ABE = 90° - \angle BAC = \angle BCA$ из суммы углов треугольника $\triangle BAH$

Тогда $\triangle EBA \sim \triangle DCA$ по 2 углам

$\angle BAE = \angle CAD$ и $\angle ABE = \angle BCA$

Проведем $FP \parallel BH$, $\angle PFH = 90°$, $\angle PFC = 90°$

$\angle PFE = 90° - \angle AFE = 90° - \angle CFD = \angle PFD$ +

Докажем, что $\triangle AFD \sim \triangle ADC$, это следует из равенства $AD^2 = AF \cdot AC$ откуда?

или $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC}$, т.е. они подобны из отношения двух сторон и равного угла между ними $\angle DAF$ - общий

Тогда $\angle AFD = 180° - \angle CFD = \angle ADC = \angle AEB$, тогда $\angle AEH = \angle CFD$ как смежный с $\angle AEB$.

$\angle FEH = \angle EFP$ как внутренние накрест лежащие при параллельных BH и PF и секущей FE, тогда $\angle AEF = \angle AEH + \angle HEF = \angle CFD + \angle PFD = 90^\circ$

ч.т.д.

Задача 4

Заметим, что либо $y = [\sqrt{p}]$, либо $y = [\sqrt{p}] + 1$ подходит, а вернее ~~[illegible]~~ $y = [\sqrt{p} + 0{,}5]$

p	y
5	2
7	3
11	3
13	4
17	4
19	4
23	5

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

11:53
11:58

М-2-11-28

Фамилия Выгузов

Имя Артем

Отчество Андреевич

Класс 11

Территория Пермский край, г. Пермь

Образовательная организация МАОУ СОШ №9

М-2-11-28

Задача 6.

Сначала допишем на доску функцию:

$(x+1)(x^3+1) = x^4+x^3+x+1$

6	7	8	9	10	Σ
+ Хр	+	+	+	∓	28
7 Б	7 НА	7 Б	7 НА	0 Хр	

Потом допишем функцию:

$x^4+x^3+x+1-(x^4+1) = x^3+x = x(x^2+1)$

Заметим, что полученная функция подходит.

при $x>0$ $x^2+1>0$, т.е. $x(x^2+1)>0$

при $x<0$ $x^2+1>0$, т.е $x(x^2+1)<0$

Задача 7.

Для удобства пусть 2 цвета - красный и синий.

Приведём пример алгоритма раскраски всех чисел. Построение и доказательство алгоритма докажем при помощи индукции.

Утверждение: все числа $x \le 2^n$, где $n \ge 0$, $n \in \mathbb{Z}$ можно раскрасить требуемым образом.

База: $n=0$ $x=1$ покрасим в красный цвет

Переход: предположим, что для всех $x \le 2^k$ утверждение верно, докажем его для $x \le 2^{k+1}$

Д-во: все $x \le 2^k$ как-то раскрашены требуемым образом, значит 2 в степени не более k не получаются.

Алгоритм раскраски.

Рассмотрим $2^k < x < 2^{k+1}$

Заметим, что $2^{k+1} - x < 2^k$, т.е. оно уже покрашено, если оно покрашено в красный то красим x - в синий, иначе в красный

Оставшиеся $x=2^{k+1}$ покрасим в красный. Докажем корректность раскраски.

Правильность для степени 2 не более k следует из предположения индукции.

Правильность для степени 2 равной $k+1$ следует из алгоритма, т.к. все пары различных чисел, которые в сумме дают 2^{k+1} — разноцветные

Заметим, что при выборе 2 различных чисел $x_1 \leq 2^{k+1}$ и $x_2 \leq 2^{k+1}$ хотя бы одно неравенство будет строгим, значит $x_1+x_2 < 2^{k+2}$ и этот случай можно не рассматривать.

Утверждение доказано т.к. для каждого числа можно определить его цвет, и требуемые условия будут выполнены.

Задача 8.

Пусть $\sin x + \cos y = \frac{a}{b}$, ~~где $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$~~ где a и b — натуральные числа

$\cos x + \sin y = \frac{c}{d}$, где c и d — натуральные числа

Тогда $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{a}{b} \\ \cos x + \sin y = \frac{c}{d} \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos y = \frac{a}{b} - \sin x \\ \sin y = \frac{c}{d} - \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 y = \frac{a^2}{b^2} + \sin^2 x - 2\frac{a}{b}\sin x \\ \sin^2 y = \frac{c^2}{d^2} + \cos^2 x - 2\frac{c}{d}\cos x \end{cases}$$

Сложим и получим

$$\sin^2 y+\cos^2 y=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}+\sin^2 x+\cos^2 x-2\frac{a}{b}\sin x-$$
$$-2\frac{c}{d}\cos x$$

$$\cancel{1}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}+\cancel{1}-2\frac{a}{b}\sin x-2\frac{c}{d}\cos x$$

$$2\frac{a}{b}\sin x+2\frac{c}{d}\cos x=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}$$

Домножим на b^2d^2 (т.к. b и d - натуральные числа, то $b^2d^2>0$)

$$2abd^2\sin x+2cdb^2\cos x=a^2d^2+c^2b^2$$

Пусть $m=2abd^2$, $n=2cdb^2$, m и n - натуральные, т.к. a,b,c,d - натуральные

Тогда $m\cdot\sin x+n\cos x=a^2d^2+c^2b^2$

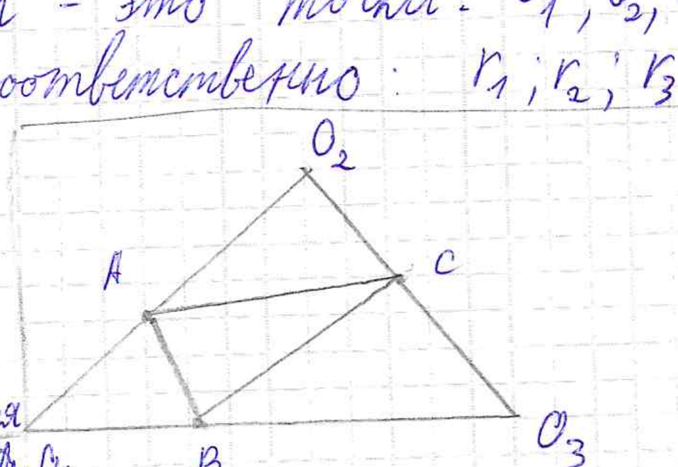
где $d^2a^2+c^2b^2$ какое-то натуральное число, т.к. a,b,c,d - натуральные числа.

Значит такие m и n существуют.

ч.т.д.

Задача 9.

Пусть центры сфер - это точки: $O_1; O_2; O_3$, а радиусы соответственно: $r_1; r_2; r_3$



Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$

Заметим, что $O_1A=O_1B=r_1$

$O_2A=O_2C=r_2$ $O_3B=O_3C=r_3$,

т.е. A, B, C - точки касания окружности вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$

Значит окружность, описанная около $\triangle ABC$ – окружность вписанная в $\triangle O_1O_2O_3$, т.к. они имеют 3 общие точки: A, B, C

$O_1O_2 = r_1 + r_2$

$O_1O_3 = r_1 + r_3$

$O_2O_3 = r_2 + r_3$

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1O_3 + O_2O_3}{2} = r_1 + r_2 + r_3 \quad \text{– полупериметр } \triangle O_1O_2O_3$$

По формуле Герона для $\triangle O_1O_2O_3$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}$$

По формуле площади треугольника:

$S = pr$, где p – полупериметр
r – радиус вписанной окружности

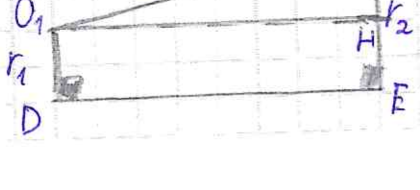
Тогда для $\triangle O_1O_2O_3$ верно равенство

$$(r_1+r_2+r_3)r = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}$$

$$r = \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}$$, где r – радиус окружности, описанной около ABC

Пусть точка касания 1-ой сферы – D
2-ой сферы – E
3-ей сферы – F

Не умаляя общности $r_1 \le r_2$



$O_1D \perp DE$ и $O_2E \perp DE$, т.к. сфера и плоскость касаются

Проведём $O_1H \parallel DE$

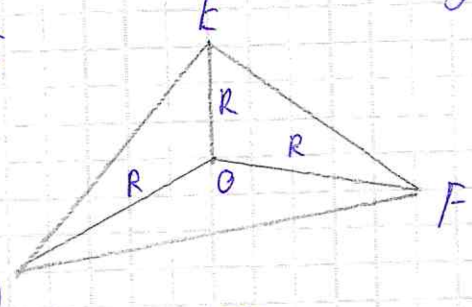
$O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

$DE = O_1H$, т.к. $DEHO_1$ – прямоугольник (параллелограмм)

Аналогично можно получить $EF = 2\sqrt{r_2r_3}$

$DF = 2\sqrt{r_1r_3}$

Рассмотрим $\triangle DEF$



Пусть O – центр описанной около него окружности

R – радиус этой окружности

Из неравенства треугольника для $\triangle DOF$, $\triangle DOE$ и $\triangle EOF$

$2R \geq DF$
$2R \geq DE$
$2R \geq EF$

Прим: неравенства не строгие, т.к. возможны вырожденные случаи, но какое-то будет строгим.

$6R > 2(\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3})$

$3R > \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1}} + \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_2}} + \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_3}}$

Заметим, что $\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1}} \geq \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}$, т.к. $r_1 \leq r_1+r_2+r_3$,

Тогда $3\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}} < \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1}} + \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_2}} + \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_3}}$ (*)

т.е. $\cancel{3}R > \cancel{3}\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}$

$R > \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}} = r$

Значит $R > r$ ч.т.д.

Прим*: неравенство строгое, т.к. какое-то из 3-ех точно строгое

$r_1 \leq r_1+r_2+r_3$
$r_2 \leq r_1+r_2+r_3$
$r_3 \leq r_1+r_2+r_3$

Задача 10.

Ответ: 7.

КОНТРПРИМЕР

Д-во, что при 7 можно.

Если ~~В~~ Вася сделает 7 различных запросов, то по Принципу Дирихле про какой-то из многочленов будет хотя бы 4 ответа. Тогда Васе будет достаточно перебрать все 4ки ответов Пети. Решить систему уравнений с какими-то 3 из них и проверить подходит ли ~~[illegible]~~ оставшийся ответ

Д-во, что не более, чем за 6 нельзя.

Заметим, что если Вася будет знать не более 6 значений, то возможен случай, когда про каждый из многочленов дано не более 3 ответов. Значит можно говорить лишь об определении многочлена по 3 точкам, но предполагаемых многочленов может быть C_6^3 и какие из них подходят выяснить не удастся.

0 ДОКАЗАНО, ЧТО ЗА 6 ХО[illegible] – НЕЛЬЗЯ