Министерство образования Пермского края

Математика

Задания дистанционного тура регионального этапа всероссийской олимпиады школьников в Пермском крае

2012/2013 учебный год

7 класс
ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 240 МИНУТ

1. Три черепахи – Анюта, Белла и Лучи – соревнуются в беге на дистанцию 30 м. Они стартовали одновременно. Когда Анюта финишировала, Белле оставалось до финиша 10 м, а Лучи была на 4 м впереди Беллы. На каком расстоянии до финиша будет Белла, когда Лучи закончит дистанцию, если каждая черепаха движется с постоянной скоростью?

2. Есть 6 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Используя их, можно составить два трехзначных числа, например, 645 и 321. Составьте эти числа так, чтобы их разность оказалась самой маленькой из всех возможных.

3. В кружке «Умелые руки занимается 40 школьников, у каждого в кармане лежат винтики, болтики и гвоздики. Ровно у 10 из них количество гвоздиков равно количеству винтиков, а ровно у 15 школьников количество гвоздиков не равно количеству болтиков. Докажите, что не менее, чем у 15 кружковцев количество винтиков не равно количеству болтиков.

4. Прямоугольный кусок волшебной кожи («шагреневая кожа») исполняет любые желания своего владельца, но после каждого исполнения желания он уменьшается на половину своей длины и на одну треть ширины. После исполнения 5 желаний он имел площадь 12 см^2, а после двух желаний его ширина была 9 см. Какой была его длина после исполнения первого желания?

5. Набор состоит из 30 гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, … , 30 г. Из набора убрали 10 гирек, общая масса которых равна трети общей массы всех гирек. Можно ли оставшиеся гирьки разложить на две чашки весов по 10 штук на каждую чашку так, чтобы весы оказались в равновесии?

8 класс

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 240 МИНУТ

1. Средний рост восьми баскетболистов равен 2 м 1 см. Некоторые из них имеют рост ниже, чем 1 м 98 см. Каким может быть самое большое число таких «низкорослых» баскетболистов?

2. Покажите, что если выражение $3a+4b+5c$ при некоторых целых значениях a, b и c делится на 11, то и выражение $9a+b+4c$ при этих значениях a, b и c также делится на 11.

3. В прямоугольнике ABCD точка M – середина стороны BC, точка K – середина стороны CD, P – точка пересечения отрезков DM и BK. Докажите, что угол MAK равен углу BPM.

4. На шахматной доске расставлено 15 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура. Докажите, что с доски можно убрать одну фигуру так, что оставшиеся фигуры будут вновь удовлетворять тому же требованию: в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура.

5. В секретной организации состоит 6 тайных агентов. Любые два тайных агента либо дружат, либо враждуют, либо не знакомы. Тайные агенты рассказывают новости только своим друзьям. Кроме того, у каждого агента любые два его друга враждуют, а любые два врага дружат. Руководитель организации сообщил одному тайному агенту новость о начале секретной операции. Докажите, что обязательно найдется тайный агент, который не узнает эту новость.

9 класс
ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 240 МИНУТ

1. Докажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то хотя бы одна из них делится на 2 и хотя бы одна делится на 3.

2. BD- биссектриса угла B треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E, описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что AE=CF.

3. Мастер делает за час целое число деталей, более 5, а любой его ученик – на 2 детали меньше. Мастер один выполняет заказ за целое число часов, а два его ученика вместе (работающие с одинаковыми скоростями) – на 1 час быстрее. Сколько деталей входит в заказ?

4. Двадцать литровых сосудов содержат 1,2,3, ,20 мл воды. Разрешается перелить из сосуда A в сосуд B столько воды, сколько имеется в сосуде B. Можно ли добиться, чтобы после нескольких переливаний в пяти сосудах стало по 3 мл воды, а в остальных – 6,7,…,20 мл?

5. Квадрат 2012x2012 разделен на квадратики 4x4, 3x3, 2x2, 1x1. Может ли оказаться, что суммарное число квадратиков 4x4, 2x2 и 1x1 равно 2012?

10 класс
ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 240 МИНУТ

1. Могут ли три числа, являющиеся квадратами трех попарно различных натуральных чисел, составлять арифметическую прогрессию?

2. Требуется разделить $2n-1$ одинаковых булок поровну между n туристами. Какое наименьшее число разрезов необходимо для этого сделать? Предполагается, что от любого куска можно точно отделить любую его часть.

3. На плоскости отмечены 4 точки, являющиеся вершинами квадрата. Как провести прямую, сумма расстояний от которой до отмеченных точек минимальна?

4. Пусть $\varphi(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Докажите, что $\varphi(0)+\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)+\varphi\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\dfrac{n-1}{n}\right)+\varphi(1)=\dfrac{n+1}{2}$.

5. В группе детского сада 20 детей. Дед Мороз вручил каждому ребенку по подарку, в каждом подарке по 20 конфет – по одной каждого из 20 сортов. Выяснилось, что у каждого ребенка среди этих 20 сортов конфет один любимый и один нелюбимый. При этом у любых двух детей как любимые, так и нелюбимые сорта конфет разные. Будем говорить, что произошел обмен, если два ребенка дали друг другу по одной конфете. Докажите, что, сделав последовательно не более 19 обменов, дети могут добиться того, что у каждого из них будет не менее двух конфет любимого сорта и не будет конфет нелюбимого сорта.

11 класс
ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 240 МИНУТ

1. По кругу записаны числа 1, 2, ..., 20 в каком-то порядке.

Каково наибольшее возможное значение наименьшей разности между соседними по кругу числами?

Пример: если числа стоят в порядке 1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18, то наименьшая разность между соседними числами равна $12 - 9 = 3$.

2. Найти все функции f, удовлетворяющие для всех действительных чисел x, y условию

$f(x) - f(y) \geq m(x-y)$, где m - действительная константа.

3. Докажите, что числа от 1 до 2012 включительно нельзя выписать подряд в некотором порядке так, чтобы полученное число было точным кубом.

4. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую – черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью – 1/2 очка, за поражение – 0 очков).

Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

5. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC. На ней выбрана точка D так, что $|AD| = |AC|+|AB|$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что прямая, проходящая через точку E и параллельная прямой BC, пройдёт через центр вписанной окружности ABC.