Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI 10 -29

Фамилия Князев

Имя Матвей

Отчество Сергеевич

Класс 10

Территория г. Березники, Пермский край

Образовательная организация МАОУ "СОШ с УИОП №3"

№1

Рассм. какое-нибудь число, например, 1657. Его сумма цифр $(1+6+5+7=19)$ равна 19, а произведение $(1\cdot6\cdot5\cdot7=210)$ равно 210. А произведение этих чисел $19\cdot210=3990$, т.е. 1657 подходит под задачу.

Ответ: 1657

1	2	3	4	5	Σ
+вм	+лб	+к	+вм	∅	
7	7	7	7	0	28

№2

Допустим противное, т.е. что все числа различны. Тогда $A\cup B$ содержит $2n$ различных натуральных чисел, сумма которых равна $2n^2$. Т.к. числа различные, то их сумма не меньше суммы первых $2n$ чисел (к-рая, по известной формуле, равна $\frac{2n(2n+1)}{2}$), т.е. $\frac{2n(2n+1)}{2}\le 2n^2$

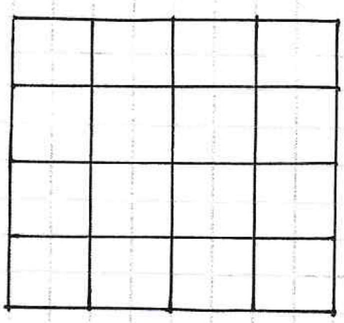
$4n^2+2n\le 4n^2 \to n\le 0$ — противоречие $\to$ найдётся число, принадлежащее как множеству A, так и множеству B

P.S. Давайте докажем, что сумма первых x нат. чисел не больше суммы x разл. нат. чисел. Для этого упорядочим разл. числа в порядке возрастания и поймём, что i-тое разл. число $c_i\ge i$, (иначе $c_i<i \to$ разл. числа от 1 до $i-1$-того $<c_i-1$, т.е. они $<i-1$ и могут принимать только знач. от 1 до $i-2$, но тогда по принципу Дирихле хотя бы 2 числа совпадут (ну а для $i=1$ утверждение очевидно)) $\longrightarrow$ сумма разл. чисел $=\sum_{i=1}^{i=x} c_i \ge \sum_{i=1}^{i=x} i=\frac{x(x+1)}{2}$

P^2S. По индукции докажем, что сумма первых x нат. чисел равна $\frac{x(x+1)}{2}$. База очевидна (при $x=1$ сумма равна $\frac{1\cdot2}{2}=1$). Переход: сумма первых x $\frac{x(x+1)}{2}\to$ первых $x+1$ чисел — $\frac{x(x+1)}{2}+x+1=\frac{(x+2)(x+1)}{2}$, ч.т.д.

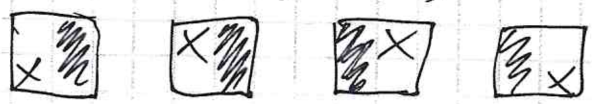
№3

Разобьём всю доску на квадраты 2×2. Докажем, что Дима имеет выигрышную стратегию. При каждом ходе Коля ставит крестик в какой-то квадрат 2×2. Будем ходить так, чтобы не



Разбиение на 2×2

задевая за Диму в этот ход других квадратов. Если Коля впервые сходил в этот квадрат, то возможен один из 4 случаев (см. далее). При этом мы будем ставить доминошку в любую из 2 возможных позиций



(X – крестик, ▨ – доминошка)

Если же Коля во второй раз сходил в этот квадрат, то до этого хода ~~он~~ он выглядел как один из предыдущих 4 случаев (ибо при игре Коли в других квадратах мы не задевали рассматриваемый квадрат) → Коля мог сходить только в оставшуюся клетку, к-рую мы занимаем, вместе с соседней в этом квадрате, доминошкой.

В третий и более разы Коля, очевидно, не может ходить в тот же квадрат.

Таким образом, при нашей стратегии после хода ~~Д~~ Коли у Димы всегда есть ход, а т.к. игра конечная (за каждый ход уходит ≥ 1 клетка, а клеток 64), то у Коли кончатся ходы и Дима выиграет

№4

~~Для каждого~~ Докажем, что если для какого-то y $\left(1<y\leq \frac{p-1}{2}\right)$ между $\sqrt{py+1}$ и $\sqrt{py+p+1}$ нет целых чисел, то y или $y+1$ подходят. Допустим противное. Числа $py+1$ и $py+p+1$ ~~имеют~~ представляются как произв. целых $>y$ и $>y+1$ соот-но → число $py+1=ab$, где $a,b\in\mathbb{Z}$, $a,b>y$. Хотя бы одно из чисел a и b должно быть $\leq\sqrt{py+1}$, иначе $ab>py+1$ → $py+1$ имеет делитель на промежутке $(y,\sqrt{py+1}]$. Аналогично на $(y+1,\sqrt{py+p+1}]$ имеет делитель $py+p+1$, причём этот промежу-

~~т.к. можно сократить до $(y+1, \sqrt{py+1}]$ в силу допущения, что на $(\sqrt{py+1}, \sqrt{py+p+1}]$ нет целых. Допустим, что~~

Допустим противное, т.е. что для каждого $y \in [1, \frac{p-1}{2}]$
$py+1 = a_i b_i$, где $y < a_i, b_i$
$b_i \leq \frac{py+1}{a_i} < \frac{py+1}{y} \to b_i \leq p$ (причём $b_i \neq p$, иначе $a_i b_i \vdots p$, но $py+1 \not\vdots p$) $\to$

$\to b_i < p$ (как и $a_i < p$)

Докажем, что все a_i и b_j различны, то есть в объед. $a_i \cap b_i$ нет совпадающих эл-тов. Допустим противное, что для y_1 и $y_2 \in [1, \frac{p-1}{2}]$ a_1 и a_2 совпали $a_1 = a_2 = a$:

$py_1 + 1 = ab_1$

$py_2 + 1 = ab_2$

$p(y_1 - y_2) = a(b_1 - b_2)$ $(y_1 - y_2 \neq 0)$

Т.к. $a < p$, $b_1, b_2 < p \to b_1 - b_2 < p$ ~~и~~ p-простое, то на $a \not\vdots p$, на $b_1 - b_2 \not\vdots p \Rightarrow$

$\to$ это не возможно

Тогда объед. всех a_i и b_i содержит $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p-1$ число, но $1 < a_i, b_j < p$, т.е. какие-то эл-ты должны были совпасть $\to$ противоречие $\to$ ч.т.д.

P.S. Я доказал, что для разл. y_1 и y_2 не могут совпадать a_1 и a_2 ~~тоже~~, но не доказал для $y_1 = y_2$, т.е. что $py+1$ не может быть квадратом

Допустим противное: $py+1 = k^2$

$y \leq \frac{p-1}{2} \to k^2 \leq \frac{p^2-p}{2} + 1$

Докажем $\sqrt{\frac{p^2-p}{2} + 1} < p-1$

$$\frac{p^2-p+2}{2} < p^2 - 2p + 1$$

$$p^2 - p + 2 < 2p^2 - 4p + 2$$

$p^2 - 3p + 4 > 0 \leftrightarrow (p-3)(p-1) > 0$ — выполнено для $p > 3$

Таким образом, $py+1=k^2$ и $k \leq \sqrt{\frac{p^2-p}{2}+1} < p-1$

~~$py+1=$~~

$py=(k-1)(k+1) \rightarrow k-1 \vdots p$ или $k+1 \vdots p$, но

т.к. $k<p-1$, то $k-1$ и $k+1<p$ → это возможно лишь при $k-1=0$, но тогда $y=0$, а это невозможно → $py+1$ – не квадрат для $p \geq 3$ и $y \leq \frac{p-1}{2}$ и $y>1$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

11-2-10-18

Фамилия Князев

Имя Матвей

Отчество Сергеевич

Класс 10

Территория г. Березники, Пермский Край

Образовательная организация МАОУ "СОШ с УИОП № 3"

6	7	8	9	10	Σ
$+_{т}$	$+_{п.о.}$	$\pm_{ВМ}$	$+$к	$-$	
$7_{ВМ}$	$\frac{7}{7}_{Т}$	$6_{м}$	$7_{ДЯ}$	$2_{м}$ к	29

М-2-10-18

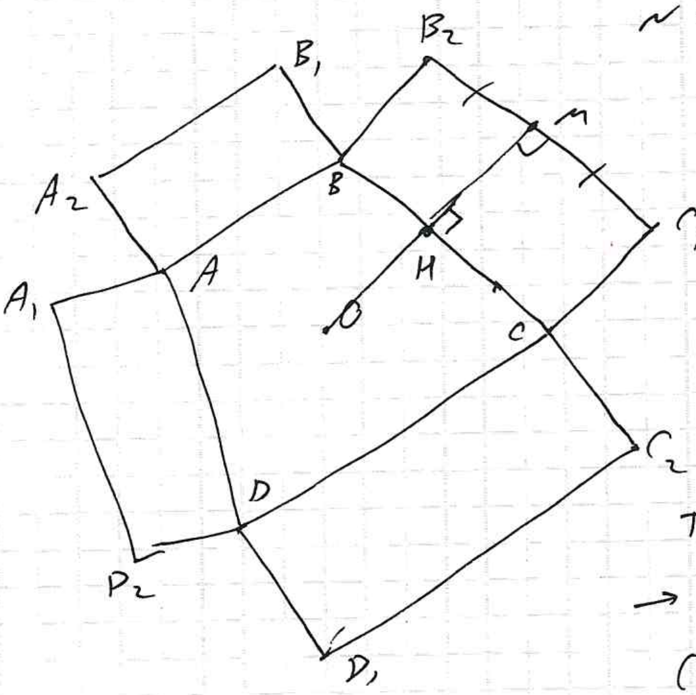
№ 6

Сначала записан $\cos x$. Запишем $\cos x \cdot \cos x$. Запишем сумму предыдущих двух: $\cos x + \cos x \cdot \cos x$

При $x=\pi$ $\cos x = -1 \rightarrow \cos x + \cos x \cdot \cos x = -1 + (-1)\cdot(-1) = -1+1=0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Ответ: да, можно

№ 7



Пусть O – центр окружности, на к-рой лежат вершины прямоугольников (кроме A, B, C, D). Обозн. вершины так, как на рисунке.

Т.к. $OB_2 = OC_1 = R$, то $\triangle B_2OC_1$ – равнобедр. $\rightarrow$ медиана OM явл-ся и высотой

Т.к. $OM \perp B_2C_1$, а $BC \parallel B_2C_1 \rightarrow OM \perp BC \rightarrow$

$\rightarrow$ MHC_1C и $MHBB_2$ – прямоугольники

$(H = OM \cap BC) \rightarrow HC = MC_1$, $BH = B_2M$,

а т.к. $B_2M = MC_1$, то и $BH = HC \rightarrow$

$\rightarrow$ в $\triangle OBC$ OH – медиана и высота $\rightarrow OB = OC$. Аналогично $OA = OB = OC = OD$

$\rightarrow$ ABCD вписан в окр. с центром в O +

№ 8

Допустим, что это возможно. Тогда каждый многочлен будет представляться как $a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – его корни, т.е. $b = a(-x_1-x_2)$, $c = ax_1x_2 \rightarrow b \vdots a$, $c \vdots a$, а т.к. $b \neq a$ и $c \neq a$, то $b \geq 2a$, $c \geq 2a$, причём т.к. $b \neq c$, то $\max(b,c) \geq 3a$ ✓

Пусть 3n последовательных натуральных чисел начинались с a_0+1 и заканчивались a_0+3n (тогда $a_0 \geq 0$, т.к. $a_0+1 \geq 1$). Допустим, что какое-то число $a > a_0+n$ оказалось старшим коэф-ом в каком-то многочлене. Тогда для соответствующих b и c в этом многочлене $\max(b,c) > 3a \rightarrow \max(b,c) > 3a_0+3n$, однако $\max(b,c) \leq a_0+3n$ (т.к. a_0+3n – наиб. из взятых последовательных чисел), $\rightarrow$ $3a_0+3n \leq \max(b,c) \leq a_0+3n$

$2a_0 < 0$ – противоречие $\rightarrow$ ~~след~~ все старшие коэф-ы $\leq a_0+n$.

А т.к. старших коэф-ов n и чисел от a_0+1 до a_0+n тоже n, то все эти числа явл-ся старшими коэф-ами $\rightarrow$ a_0+n – тоже старший коэф a $\rightarrow$ $\max(b,c) \geq 3a_0+3n$, но $\max(b,c) \leq a_0+3n$

$a_0+3n \geq \max(b,c) \geq 3a_0+3n$

$a_0 \leq 0$, (но $a_0 \geq 0$) $\rightarrow a_0 = 0$ √

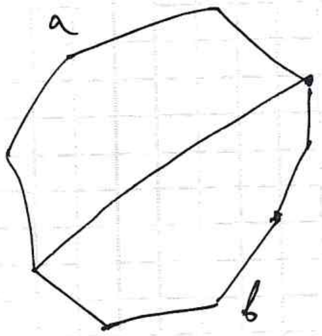
Т.е. взятые числа должны быть $1, \ldots, 3n$, причём для каждого числа x из $[n+1, 3n]$ должен найтись соответствующий старший коэф a из $[1,n]$ и тогда $x \vdots a$. Если x – простое, то необходимо $a = 1$, но на один старш. коэф. приходится только 2 числа из $[n+1, 3n]$ $\rightarrow$ если док-ть, что в $[n+1, 3n]$ при $n > 100$ есть хотя бы 3 простых числа, то задача будет решена, однако я в этом факте не уверен Этот факт неверен, использован ли он в решении?

На промежутке от $[n+1, 3n]$ есть n нечётных чисел, каждому из к-рых должен соответствовать нечётный старш. коэф. Если $n \not\vdots 2$, то на $[1,n]$ будет $\frac{n+1}{2}$ нечётных чисел, к-рым ~~может~~ должно соот-ть n неч. чисел, а т.к. одному a соответствует только по одному b и c, то каждому неч. числу из $[1,n]$ соответствует 2 неч. из $[n+1, 3n]$ кроме одного неч. числа (из $[1,n]$), к-рому соот-ет только одно из $[n+1, 3n]$. $\rightarrow$ либо n, либо $n-2$ соот-ет хотя бы 2 числа, ~~а т.к. должно быть~~ обозначим это число через a. Ему соот-ют b и c: $b \vdots a$, $c \vdots a$ и b и c нечётные $\rightarrow$ $b \geq 3a$, $c \geq 3a$, $\max(b,c) \geq 5a \geq 5(n-2)$, но $\max(b,c) \leq 3n$, а эти 2 условия невозможны вместе при $n > 100$

Если $n \vdots 2$, то см. на 2 страницы вперёд (после задачи №9)

№ 9

Допустим, что такое возможно. Пусть мы разрезаем на k-угольники. Докажем по индукции, что если n-угольник разрезается на k-угольника, то $n-k \,\vdots\, k-2$. База очевидна (k-угольник разрезается на один k-угольник и $k-k=0 \,\vdots\, k-2$). Переход для $n>k$:



Т.к. $n>k$ и n-угольник разрезается, то выберем какую-нибудь диагональ разреза. Многоугольники, на к-рые эта диагональ разрезает n-угольник, тоже должны быть разрезаемы. Пусть по одну сторону от диагонали лежит a сторон, по другую – b $(a+b=n)$. Тогда, т.к. получившиеся $a+1$-угольник и $b+1$-угольник разрезаемы, то по предположению индукции

$a+1-k=\alpha(k-2)$

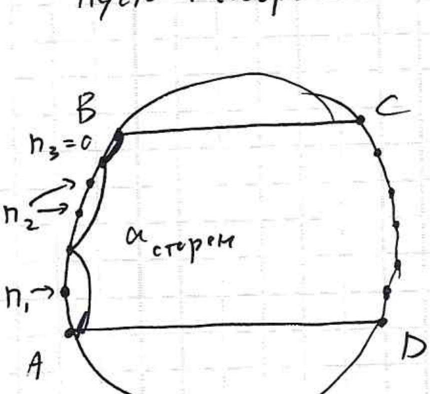
$b+1-k=\beta(k-2)$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$

Суммируя, получаем:

$n+2-2k=(\alpha+\beta)(k-2)$

$n-k=k-2+(\alpha+\beta)(k-2) \rightarrow n-k \,\vdots\, k-2$

Пусть теперь один из полученных k-угольников был хорошим и



в нём $BC \parallel AD$. Т.к. мы разрезали правильный многоугольник, то все его вершины лежат на одной окружности через равные дуги.

$AD \parallel BC \rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \rightarrow$ на дугах AB и CD (включая концы оба раза) лежит одинаковое число вершин. Пусть в ~~многоугольнике~~ рассматриваемом хорошем k-угольнике a сторон соединяют вершины из дуги $\overset{\frown}{AB}$. Обозн. через n_i $(i\in[1,a])$ кол-во вершин между концами i-й стороны (не включая концов). Т.к. многоугольник, образуемый этими n_i вершинами + 2 концами должен быть разрезаемый, то

$n_i + 2 - k = \alpha_i (k-2) \to n_i = \alpha_i (k-2) + k - 2 = (\alpha_i + 1)(k-2) \to n_i \vdots k-2$

$\to \sum n_i \vdots k-2$, $\sum n_i = \alpha(k-2)$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$

Всего же на дуге $\breve{AB}$ (включая концы) $\sum n_i + a + 1 = \alpha(k-2) + a + 1$ вершин

Аналогично пусть на $\breve{CD}$ b сторон, тогда на $\breve{CD}$ вершин $\beta(k-2)+b+1$.

Т.к. на дугах $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$ одинаковое число вершин, то

$\alpha(k-2) + a + 1 = \beta(k-2) + b + 1$

$a - b = (\beta - \alpha)(k-2) \to a - b \vdots k-2$

Однако т.к. рассматриваемый хороший многоугольник — k-угольник, то

$a + b + 2 = k \to 0 \leq a, b < k-2 \to |a-b| < k-2$, но $a - b \vdots k-2 \to$

$\to a - b = 0 \to a = b \to k = 2a+2$ — чётное, но по условию

k нечётное $\to$ противоречие $\to$ среди полученных многоугольников не

могло быть хороших +

№8 (продолжение)

Если $n \vdots 2$, то в $[1, n]$ будет $\frac{n}{2}$ неч. чисел, а в $[n+1, 3n]$ — n $\to$

$\to$ каждому неч. из $[1, n]$ будет соответствовать 2 неч. из $[n+1, 3n] \to$

$\to$ числу $n-1$ тоже соот-ет 2 неч. числа. Аналогично пред. пункту,

большее из этих чисел $\max(b, c) \geq 5^a = 5(n-2)$, но $\max(b,c) \leq 3n$,

что невозможно при $n > 100$,

Таким образом, так расставить числа нельзя

№10

– Для начала скажем, что Вася не должен повторять ходы, т.е. называть число b, к-рое он называл ранее, ибо в этом случае Петя может просто повторить свой ответ и Вася потратит ход и не получит новой информации

+ Докажем, что при $n \leq 6$ Вася может при правильной игре не ~~угадать~~ определить многочлены. Пусть Петя задумал $f(x) = x^2$ и

и $g(x) = -(x-1)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$. В 1-й, 3-й и 5-й ходы Петя будет гово-

+

М - 2 - 10 - 18

1) ~~Петя говорит точку и эта точка лежит на пятой на параболу. Тогда эта парабола — Петин многочлен~~

~~(не дорешена)~~ (не дорешена)

Если парабола с 4 точками была $f(x)$, то новая точка либо лежит на $f(x)$ → мы получаем параболу с 5 точками и называем её, либо она не лежит ~~на на одну из построенных парабол~~ на неё → из первых 6 точек только 2 были из $g(x)$ и 4 из $f(x)$ (эти 4 точки тогда лежат на одной параболе), тогда Вася называет параболу, проходящую через те 3 точки, к-рые не лежали на параболе с 4 точками; ~~либо новая точка лежит на одну из построенных парабол~~ +1

Если эти 4 точки не были $f(x)$, то 2 из них были из $f(x)$ и 2 из $g(x)$

2Б.

рить $f(t)$, а в 2-й, 4-й и 6-й ходы — $g(t)$.

Если Вася называет многочлен, проходящий через ≤ 2 или ≥ 4 точки, то он ошибся, ибо на самом деле оба Петиных многочлена содержат по 3 названные точки

Если Вася наз-ет многочлен, проходящий через $=3$ точки, то можно подобрать другие многочлены, также подходящие под названные точки. Действительно, выберем 2 точки из тех, через к-рые проходит Васин многочлен, + ещё одну названную точку не с этой параболы и проведём через них параболу (это можно сделать, ибо Вася всегда называл разные t) $f'(x)$ и параболу $g'(x)$ через оставшиеся 3 точки. Тогда $f'(x)$ и $g'(x)$ вполне могли быть Петиными многочленами, хотя Вася назвал другой +1б. (-)

Докажем теперь, что при $n=7$ Вася всегда может выиграть. Первые 6 ходов Вася называет любые t, для определённости 1, 2, 3, 5, 8, 13. Затем для каждой тройки полученных точек Вася строит параболу и получает C_6^3 парабол (не обязательно различных). Две параболы либо пересекаются по конечному (≤ 2) кол-ву точек, либо совпадают $\rightarrow$ кол-во точек пересечения несовпадающих парабол конечно и для нек-рого $t=t_0$ ~~параболы~~ $f(t_0)=g(t_0) \Leftrightarrow f(t)=g(t)$

~~Ещё если какие-то~~ ~~Если какие-то 2 параболы совпадают~~

+ Если на какой-то параболе лежит 5 точек, то хотя бы 3 из них принадлежат одному и тому же Петиному многочлену $\rightarrow$ эта парабола явл-ся Петиным многочленом и Вася победил

+ Если ни на одной параболе не лежит ≥ 4 точек, то из названных 6 ~~то~~ точек 3 из $f(x)$ и 3 из $g(x)$, т.е. $f(x)$ и $g(x)$ явл-ся одной из построенных парабол (причём построенные параболы не совпадают) $\rightarrow$ называя t_0 мы получим $f(t_0)$ или $g(t_0)$ и определим однозначно параболу $f(x)$ или $g(x)$

Если же на нек-рых параболах $=4$ точки, но нигде не ≥ 5 точек, то Вася называет t_0 ? не проходит ?