Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI — 11—13

Фамилия КУЛЯБИН

Имя ДЕНИС

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Класс 11

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ „СОШ №146" г. ПЕРМИ

1	2	3	4	5	Σ
+Б 7хр	+Б 7	— * О НА	∅ О НА	2 ГЕ	16

МI – 11 – 13

№ 11.1 1) Заметим, что 77 можно разложить как произведение целых чисел 4 способами: $77 = 11\cdot 7 = 1\cdot 77 = (-1)\cdot(-77) = (-7)\cdot(-11) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ чтобы выполнялось условие для $n > 2$? пара наименьших чисел должна быть отрицательной (каждое число из пары < 0), а пара наибольших должна быть положительной (каждое число из пары > 0), т.к. $\begin{cases} 1 < 7 < 77 \\ 1 < 11 < 77 \end{cases}$

2) Рассмотрим пару наибольших чисел:

1. Если эта пара равна $(1; 77)$, то других положительных чисел на доске быть не может, т.к. 1 – второе наибольшее число

2. Если эта пара равна $(7; 11)$, то на доске также могут быть числа 6, 5, 4, 3, 2, 1, , т.к. наименьшая пара чисел < 0, и 7 – второе наиб. число

3) Аналогично рассуждая п.2 для наименьшей пары чисел, получим, что эта пара должна быть равна $(-7; -11)$ для получения наибольшего n.

4) Суммируя утверждения из п.2 и п.3, получим, что для нахождения максимального n пара наименьших чисел равна $(-7; -11)$, а пара наибольших чисел равна $(7; 11) \Rightarrow$ все $\mathbb{Z}$ числа $[-6; 6]$ могут быть написаны на доске $\Rightarrow$ для n – максимального получаем ряд чисел:

$-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$ – 17 чисел

Ответ: $n = 17$

№ 11.2. 1) Предположим, что числа принадлежащего обоим множествам не найдётся, тогда:

среднее арифметическое чисел из множества A равно ср. арифметическому чисел из множества B $= \frac{n^2}{n} = n$

2) Сложим все числа из обоих множеств и найдём их среднее арифметическое: $\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n} B_i}{2n} = \frac{2n^2}{2n} = n$

Продолжение см. на след. листе.

№11.2 (продолжение)

3) Найдём среднее арифметическое всех N чисел от 1 до 2n =

$$= \frac{\sum_{i=1}^{2n} i}{2n} = \frac{(2n+1)\cdot 2n}{2\cdot 2n} = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} \Rightarrow$$ это минимальное среднее арифметическое 2n различных N чисел;

но среднее арифметическое ~~чисел из 2~~ 2n различных чисел из множеств A и B (по предположению) $= n$, т.е. меньше минимально возможного ср. арифм. 2n разл. N чисел $\Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow$ найдётся число, $\in$ обоим множествам, чтд.

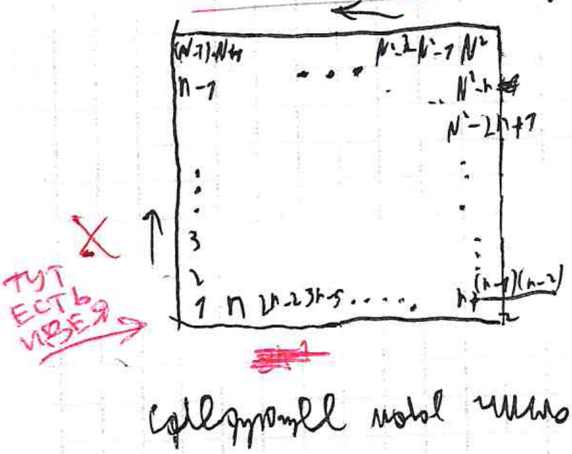
№11.5. 1) Заметим, что в строке, в которой находится число N^2, число N^2 всегда будет большим, т.к. др. чисел, больших, чем N^2 в таблице нет.

2) Заметим, что в столбце, в котором находится число 1, число 1 всегда будет малым, т.к. чисел < 1 в таблице нет.

3) Для того чтобы найти наименьшую возможную разность между $\sum$ всех больших чисел и $\sum$ всех малых чисел, $\sum$ больших должна быть наименьшей, а $\sum$ малых – наибольшей.

4) Суммируя все предыдущие утверждения, получим, что таблица должна иметь такой вид:

НЕТ ОБОСНОВАНИЯ



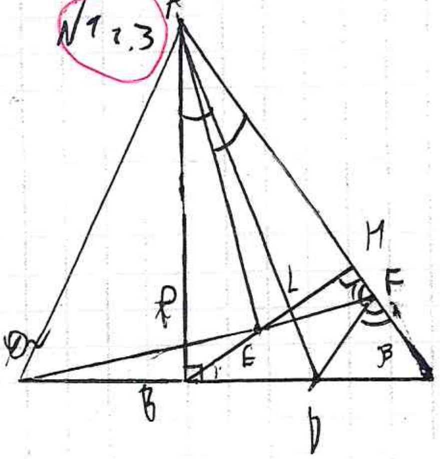
В данной таблице $\sum$ малых будет наибольшей, а $\sum$ больших будет наименьшей, т.к. при таком заполнении в каждой следующей строке (сверху вниз) большее число будет на столько меньше предыдущего большего, насколько следующее малое число (слева направо) будет больше предыдущего малого.

5) Получим, что разность равна: $N^2 - 1 + (N-1)^2 - 1 + (N-2)^2 - 1 + (N-3)^2 - 1 + \ldots + 2^2 - 1 + 1^2 - 1 =$

$$= \sum_{i=1}^{N} i^2 - N$$ Ответ: $\sum_{i=1}^{N} i^2 - N$. +

НЕ ВЕРНО при $N = 4, 5, \ldots$

№1 г.3



Решение.

1) Обозначим $\angle BAC$ за α, $\angle ACB$ за β, $\angle BAD = \angle CAE$ за γ, $\angle AFE = \angle CFD$ за W.

2) Продлим отрезок EF до пересечения с прямой BC; $EF \cap AB = P$; $EF \cap BC = Q$;

3) В $\triangle APH$: $\angle APH = 180^\circ - \alpha - W$

~~4) В △APQC~~

4) В $\triangle QFC$: $\angle FQC = 180 - \beta - (180 - W) = W - \beta$

5) В $\triangle ADB$: $\angle ADB = 90 - \gamma$

6) $BH \cap AD = L$; $\angle ALH = 90 - \gamma = 180^\circ - 90^\circ - \gamma$

7) В $\triangle AHB$: $\angle ABH = \beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$

8) В $\triangle PBQ$; $\angle BPQ = 180^\circ - \beta + W - 90^\circ - \beta = 90^\circ - 2\beta + W$

Нет продвижений

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

М-2-11-14

Фамилия КУЛЯБИН

Имя ДЕНИС

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Класс 11

Территория г. ПЕРМЬ

Образовательная организация МАОУ „СОШ №146" г. ПЕРМИ

M-2-11-14

6	7	8	9	10	Σ
+ хр	+ хр	∅	+ НА	∅	21
7 Б	7 ск	0 Б	7 Д	0 хр	

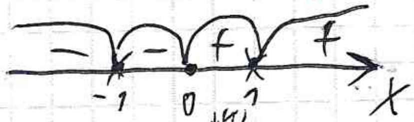
№11.6 ~~… из x^4+1~~

1) $(x^4+1)-(x^2+1)=x^2\cdot(x^2-1)=f(x)$

2) $(x^3+1)-(x+1)=x\cdot(x^2-1)=\varphi(x)$

3) $f(x)\cdot\varphi(x)=x^3\cdot(x^2-1)^2$

Интервалы данной функции:



$f(x)\varphi(x)<0$ $\quad f(x)\varphi(x)>0$

Ответ: ф-ция равна $x^3\cdot(x^2-1)^2$ и может быть получена из написанных на доске ф-ций.

№11.7 Ответ: Да, можно; для этого:

1) покрасим все числа вида $m\equiv 1 \pmod 4$ в один цвет, а числа вида $n\equiv 3 \pmod 4$ в другой цвет, тогда сумма одноцветных чисел будут вида $k\equiv 2 \pmod 4$, что справедливо только для одной степени двойки — 2^1, а все последующие степени двойки уже будут кратны 4 (2^1 можно разложить как сумму N чисел только в виде $1+1$ ⇒ её нельзя разложить как сумму различных N чисел) ⇒ получим, что все нечётные числа раскрасить можно

2) 1. Обозначим 1 цвет, как белый, другой — как чёрный.

2. База: возьмём ряд чисел от 2 до 6:

2, 4, 6

2 раскрашиваю белым, 6 — в чёрный, а 4 — в произвольный (белый):

2, 4, 6
б б ч

Продлим данный ряд до 14:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.
б б ч

Все числа справа от 8 красим в противоположный цвет относительно чисел, симметричных им для 8; саму 8 красим в произвольный цвет (белый).

№11.7 (продолжение):

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
б, с, ч, б, с, ч, ч,

(16 нельзя разложить, как $\sum$ 2 разн. одноцветн. чисел)

Мы получили, что для всех чисел < 16 подходящую раскраску ⇒ база доказана

3. Предположение: все числа, меньшие, чем 2^n имеют подходящую раскраску, т.е. 2^n нельзя разложить, как сумму двух одноцветных чисел.

4) Переход $n \to n+1$:

$2, 4, 6 \ldots \ldots 2^n, \ldots \ldots 2^{n+1}$
б, с, ч

5. раскрасим все числа справа от 2^n в противоположные цвета числам слева; например: (само число 2^n красим в произвольный цвет)

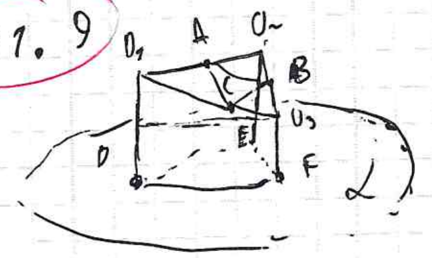
если 2 – б, то $2^{n+1}-2$ – ч; если 4 - с, то $2^{n+1}-4$ – ч.

Получим, что любое разложение 2^{n+1} как сумму двух разных чётных чисел – это сумма чисел разных цветов ⇒ раскраска для всех чисел, меньших, чем 2^{n+1} – подходящая. ⇒ переход доказан.

6. Т.к. мы доказали базу и доказали верность перехода от n к $n+1$, то по методу мат. индукции получим, что можно раскрасить все чётные числа.

7. Мы получили, что раскрасить можно все N числа ⇒ раскраска возможна, чтд.

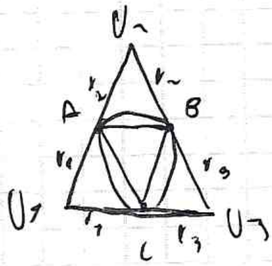
№11.9



Решение

1) Пусть O_1, O_2, O_3 – центры сфер;
Пусть $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ – радиусы сфер.

2) Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$:



в нём окружность, оп. около $\triangle ABC$ является вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$, т.к. $\begin{cases} O_2A = O_2B = r_2 \\ O_1A = O_1C = r_1 \\ O_3B = O_3C = r_3 \end{cases}$ ⇒ O_1A ... являются кас. - ными к окр. (ABC) (по определению)

№11.9. 3) $S_{\triangle O_1O_2O_3} = (r_1+r_2+r_3)\cdot r_{оп.\triangle ABC} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{оп.\triangle ABC} = \sqrt{\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{r_1+r_2+r_3}}$ + , т.к. р – полупериметр $\triangle O_1O_2O_3 = \frac{2(r_1+r_2+r_3)}{2} =$

$= r_1+r_2+r_3$

4) Проведём ⊥ из т. O_3 к O_1D $= O_3H_1$

5) В $\triangle O_3O_1H_1$ – прямоугл. по Т Пифагора:

$HO_3 = \sqrt{(r_1+r_3)^2 - (r_1-r_3)^2} = 2\sqrt{r_1r_3}$

6) O_3FDH_1 – прямоугольник, т.к. $\begin{cases} O_3F = HD = r_1; \\ \angle O_3HD = 90^\circ; \end{cases}$ $\begin{cases} O_1D \perp d \\ O_3F \perp d \end{cases} \Rightarrow O_1D \parallel O_3F$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_3H_1 = DF = 2\sqrt{r_1r_3}$ +

7) Аналогично П4 – П6 находим:

$EF = 2\sqrt{r_2r_3}$; $DE = 2\sqrt{r_1r_2}$

8) $S_{\triangle DEF} = \frac{DE\cdot EF\cdot DF}{4R_{оп}} = \cancel{\sqrt{(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_1r_3})(\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1})\cdot(-\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_1r_3})\cdot(\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_1r_3})}}$

$S_{\triangle DEF} = \frac{8r_1\cdot r_2\cdot r_3}{4R_{оп}} = \frac{2r_1r_2r_3}{R_{оп}}$

9) $S_{\triangle O_1O_2O_3} \geq S_{\triangle DEF}$ ($\triangle O_1O_2O_3$ проецируется на d в $\triangle DEF$) ($S_{\triangle O_1O_2O_3}\cdot\cos\varphi = S_{\triangle DEF}$, где φ – угол между $(d; (O_1O_2O_3))$)

$r_{ABC}\cdot(r_1+r_2+r_3)\cdot \geq \frac{2r_1r_2r_3}{R_{оп}} \;\Big|\cdot\frac{R_{оп}}{r^2} > 0$

$(r_1+r_2+r_3)\cdot\frac{R_{оп}}{r_{ABC}} \geq \frac{2\cdot r_1r_2r_3\cdot(r_1+r_2+r_3)}{r_1r_2r_3}$

$\frac{R_{оп}}{r_{ABC}} \geq 2$, где $R_{оп}$ – это R оп. окр вокруг $\triangle DEF$, $\Rightarrow$

где $r = r_{ABC}$ – R оп. окр. $\triangle ABC$.

~~10) Если $S_{\triangle O_1O_2O_3} = S_{\triangle DEF}$, то $r_{ABC} < R_{оп}$ (стороны △ не …)~~

$\Rightarrow R_{оп} > r_{ABC}$, чтд.

+ НА