

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике 2013-14 учебного года. Пермский край
11 класс (Время решения – 4 часа)**

1. Докажите, что для любых x и y справедливо неравенство:
$$\sin x \cdot \cos y + 1 \geq \sin x + \cos y.$$
2. У квадратного трехчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ известна сумма коэффициентов $a + b + c = 2$. Чему равна сумма коэффициентов
а) многочлена 4-й степени $(P(x))^2$ (после возведения в квадрат и приведения подобных членов)?
б) многочлена 20-й степени $(P(x))^{10}$?
3. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Федота Бурчеева, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Федот?
4. В четырехугольнике ABCD углы A и C – прямые. Из точек B и D опустили перпендикуляры на диагональ AC и получили соответственно точки M и N. Докажите, что $AM = CN$.
5. Островное государство расположено на 100 островах, соединенных мостами. Известно, что с каждого острова можно проехать на каждый (возможно, через другие острова). При этом любой путь, начинающийся и заканчивающийся на одном и том же острове, проходит через четное число мостов. Доказать, что найдутся 50 островов, между которыми нет ни одного моста.