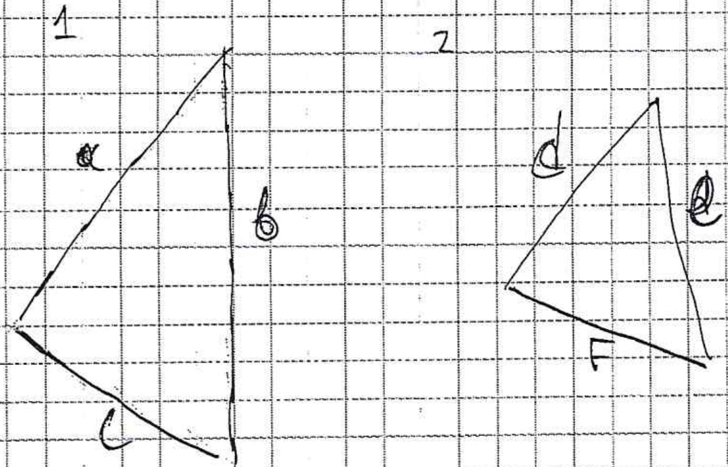
Задача № 1

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21



Без ограничения общности, пусть a, b и e — самые длинные (если a, b, c самые длинные, то очевидно составить можно)

Докажем, что из них можно составить треугольник:
Предположим противное, тогда есть несколько случаев.

1) $e \geq a+b$. Но тогда $e \geq d+f$, т.к $a+b \geq d+f$, т.к a, b, e — самые длинные. Противоречие нер-ву треугольника

2) $a \geq b+e \geq b+c$ (т.к $e \geq c$). Снова противоречие.

3) $b \geq a+e \geq a+c$ (т.к $e \geq c$) То же самое.

Ни один из случаев не возможен. Треугольник составить можно. +

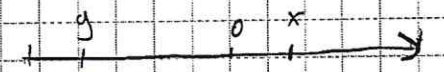
Из трех самых коротких длины палочек составить можно не всегда, например: I: 10, 10, 2 II: 9, 9, 1
Но из 1, 2, 9 треуг. не составить, ведь $9 > 1+2$ +

Задача №2

$x^4-y^4>x$; $y^4-x^4>y \Rightarrow x^4-y^4<-y$

$-y>x$ (1)

$x+y<0$. Если $xy<0$, то есть 2 случая:



I: $x>0$, $y<0$. Тогда из (1) $x<|y| \Rightarrow x^4<y^4$

Но тогда $x^4-y^4<0$. Противоречит $x^4-y^4>x$.

II $x<0$; $y>0$ Тогда $|x|>y$ из (1) $\Rightarrow x^4>y^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4-y^4>0$. Противоречит $x^4-y^4<-y$

Противоречие.

Значит $xy>0$.

Ответ: нет, не могут.

Задача № 3.

Предположим S содержит конечное кол-во чисел.

Тогда выберем a так, что среди всех чисел степень вхождения 3 в разложение на простые у a наибольшая (или их несколько возьмем любое). Представим его в виде:

$$a = \frac{b(3c-5)}{15} = \frac{b\cdot(3c-5)}{3\cdot 5}; \quad 3c-5 \not\vdots\, 3 \text{ т.к } 5 \not\vdots\, 3$$

$V_3(a) = \alpha$; $V_3(3c-5)=0$; $V_3(15)=1$ =>

=> $V_3(b) = \alpha+1$. Противоречие с тем, что a - число с ~~нан~~ наибольшей степ. вхождения 3.

* $V_3(x)$ - степень вхождения 3 в x.

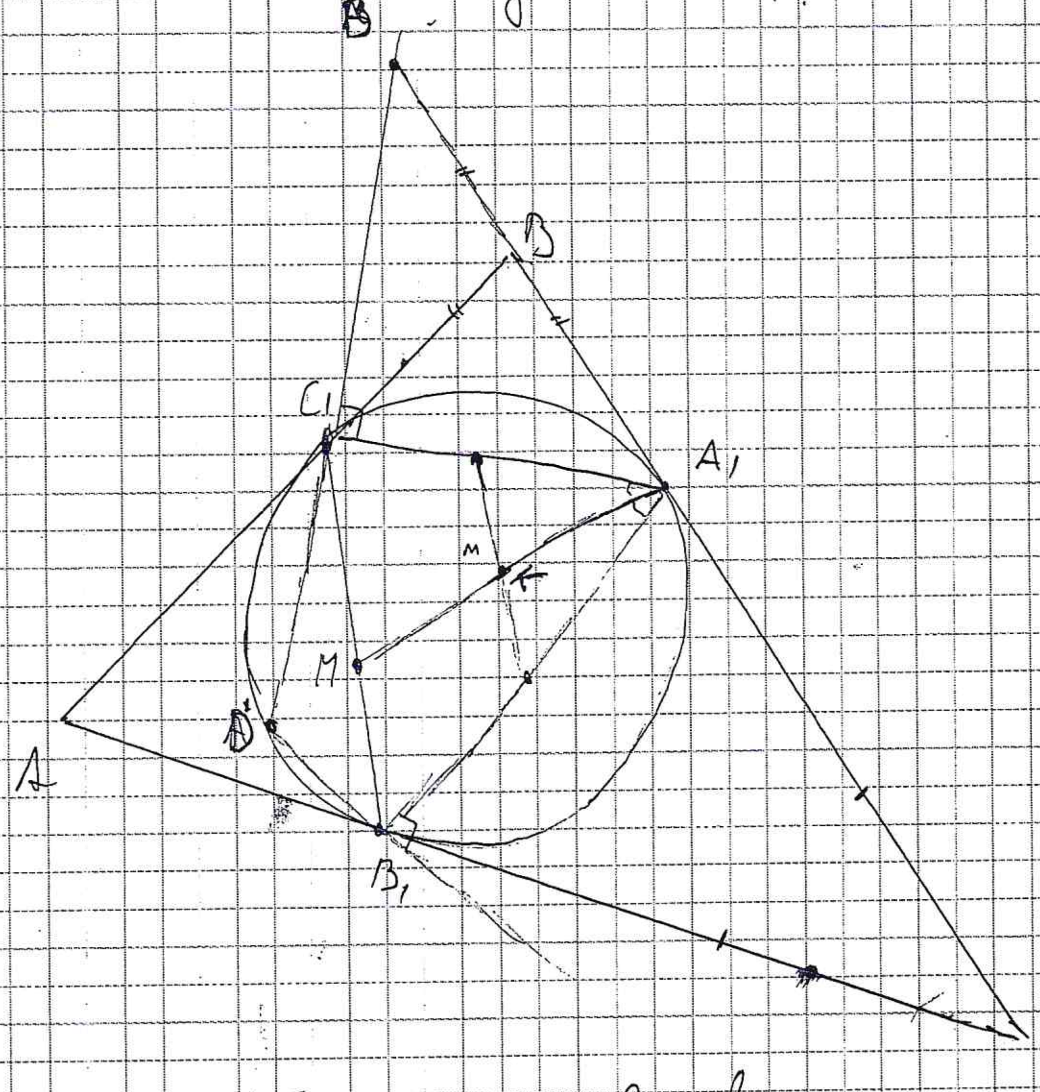
Противоречие

ч.т.д.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

M1-10-03
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача №4.



Сделаем гомотетию с коэф. 2 ~~в точ~~ с центром в точке A_1. $K \to M$; $B \to B'$; $C \to C'$.

Т.к. $A_1B = BC_1 = BB'$: $\angle B'C_1A_1 = 90^\circ$. Аналогично $\angle A_1B_1C' = 90^\circ$. Теперь надо доказать, что B_1C_1 касается окружности $B'C'M$.

Т.к. $\angle DC_1A_1 + \angle DB_1A_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то D лежит на окружности.

Далее?

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 7 | М1-10-03
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28

Задача №1 (10.6)

Очевидно что в $a+b$ не более 11 цифр

Также ясно, что в разряде единиц ~~числа~~ цифры не могут быть нечётными (сумма двух нечётных цифр чётна).

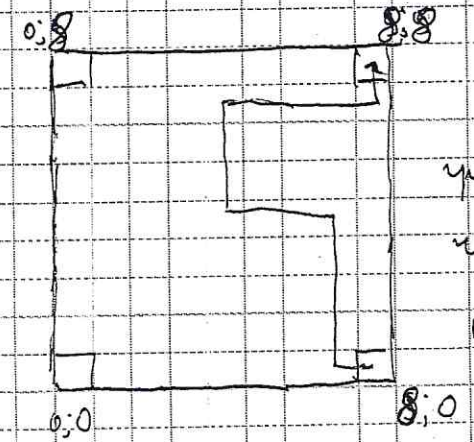
Таким образом получаем оценку на $10+10+10=30$ нечётных цифр.

Пример:

$$\begin{array}{r|l} 9999999999 & 10 \\ +\ 1111111111 & 10 \\ 11111111110 & 10 \end{array}$$

Ответ: 30

Задача №2 (10.7)



По модулю 3 числа делятся на 3 группы (0, 1, 2), а углов у нас 4, значит в каких-то двух стоят одинаковые по модулю 3 числа. Начнем идти с меньшего из них и переходить из a в $a+3$ (по стороне клеток). Очевидно, что через сколько-то шагов мы придем в другой угол (тот, где по моду-

-но 3 стоит то же число.

Введем координатную систему: левая нижняя клетка имеет координаты (0;0), а правая верхняя (8;8)

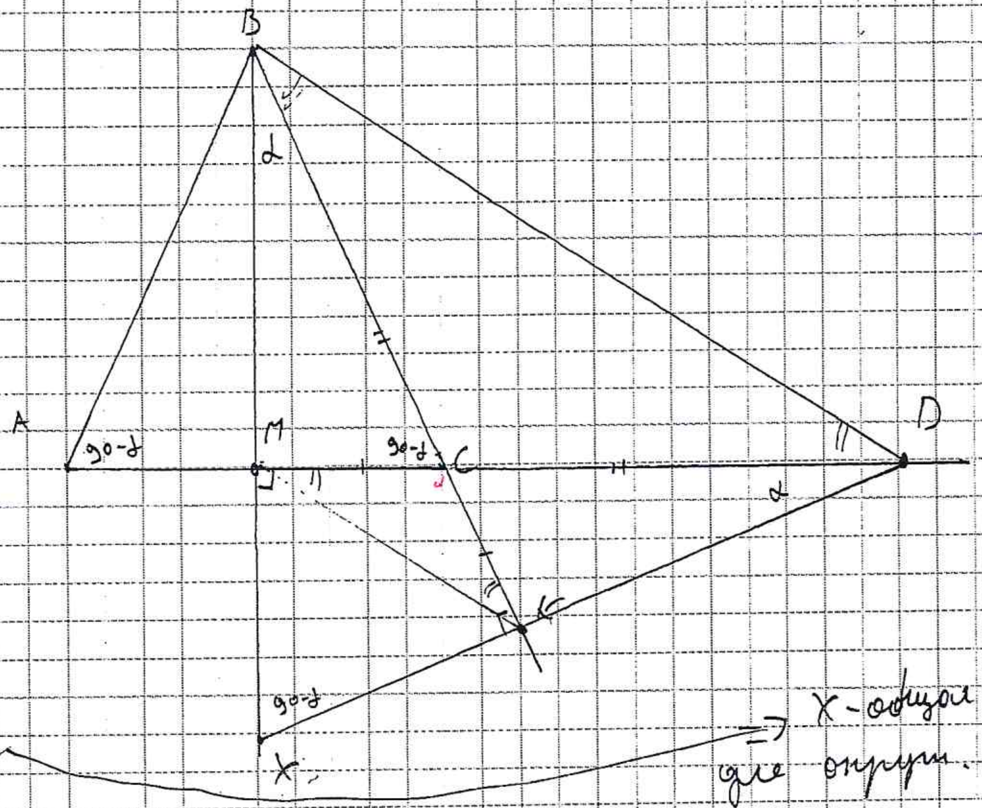
Тогда, очевидно, что на нашем пути кол-во шагов вверх и вниз отличались на 0 или на 8. Аналогично с шагами влево и вправо. Тогда суммарное кол-во шагов четно, пусть $2k$. Тогда если в начале пути стояло число a, то в конце: $a+6k$

$a+6k-a=6k \vdots 6$

ч.т.д

Ответ: да, верно.

Задача № 3 (10 б)



=> X - общая точка для окруж. MCK и ABD.

Огр! Пусть $X = BM \cap DK$

$\angle MBC = \alpha$; $\angle BCM = 90^\circ - \alpha$; т.к. $\angle CDK = \angle MBC = \alpha$ (т.к. $\triangle MBC = \triangle KDC$ по ГППТ)

$\angle BCM = \angle KCD$

То есть $\angle CKD = 90^\circ$; $\angle XMC = 90^\circ$ (высота и медиана в равнобедр. тр.)

=> $XMCK$ - вписанный => $\angle MXK = \angle MCB = 90^\circ - \alpha = \angle BAC$

=> $ABDX$ - тоже впис. При гомотетии с центром в точке X, переводящей $M \to B$, K переходит в D (из подобия равнобедр. треугольников $\triangle MCK$ и $\triangle BCD$, $MK \parallel BD$ => $\triangle XMK \sim \triangle XBD$), то есть окр. $XMCK$ переходит в окр. $XABD$. Но касательная в точке X к MCK переходит сама в себя, то есть.

окружности MCN и ABD имеют общую касательную, касающуюся их в одной точке, то есть они сами касаются.

ч.т.д.

Задача № 4. (10.9)

(и помощника)

Опишем алгоритм действий фокусника при любом $n \geq 3$. (~~$n=3$ невозможно, док-во в конце~~). ($n=3$ в конце)

Пусть фокусник первой всегда открывает первую карту.

Опишем алгоритм действий помощника:

1) Если зритель в первую клетку поставил 1 или 2, то, начиная с оставшейся цифры (1 или 2) помощник выставляет все числа в порядке возрастания в ячейках 2–4 (здесь и далее мы считаем, что клетки после первой зациклены (за 4 идет 2))

Например возможен такой вариант:

2	6	7	1	3	4	5

Теперь, открыв первую карту фокусник понимает, что нужно делать. После того как зритель открывает карту, фокусник отматывает от нее назад нужное кол-во карт и находит нужную. +

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 7

М1-10-03
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

2) Если учитель оставил первую клетку пустой.

Пусть расстояние между 1 и 2 равно k.

(| |2|2|3|1|1| здесь расстояние, например, равно 3
(не забываем что последние $n-1$ мест зациклены))

Это расстояние может быть от 1 до $n-2$. Тогда пусть фокусник и помощник договорятся так, что каждому расстоянию от 1 до $n-2$ соответствует свое число в первой клетке (от 3 до n)).

Это как? Почему можно?

Остальные клетки заполняются так: для фиксированного расстояния между 1 и 2 фокусник и помощник кроме числа в первой клетке выбирут еще и перестановку из оставшихся чисел, где 1 и 2 находятся на данном расстоянии.

какую-нибудь фикс.

Какую? Всегда ли найдёт?

Теперь помощник заполнит оставшиеся клетки так, чтобы перестановка в последних $n-1$ клетках была циклическим сдвигом нужной (той, о которой они договорились для данного расстояния). Теперь по первой клетке фокусник поймет перестановку, а по еще одной точно поймет, как она сдвинута. Тогда он явно вычислит 1 и 2.

А выбор будет?

$n=3$. Очевидно, увидев 2 карточки фокусник поймет, какая третья и найдет 1 и 2.

3

3	1	2

~~— он половину~~

3	2	1

3

Ответ: для всех $n \geq 3$ поймет.

Пример возможных расстановок чисел для $n=4$ (1 и 2 не в первой клетке)

3 1 2 4	4 1 3 2
3 4 1 2	4 2 1 3
3 2 4 1	4 3 2 1

перестановка 1, 2, 4 и ее сдвиги

перестановка 1, 3, 2 и ее сдвиги.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 7 ИЗ 7 | М1-10-03
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задание №4. (1010)

Сделаем несколько наблюдений.

Пусть дали числа $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_4$ числа разные

Тогда посмотрим на числа $НОК(a_1; a_2)$, $НОК(a_1; a_3) \dots$, $НОК(a_1; a_4)$.

Они все делятся на a_1 и находятся в арифм прогрессии длиной $\frac{4(4-1)}{2}$. Какие-то два из них находятся на расстоянии $\frac{4}{2}$ или меньше.

$k \cdot a_1 \dots\dots 4a_1 \Rightarrow \frac{4}{2} \cdot q \geq a_1 \Rightarrow q \geq \frac{2a_1}{4} \geq 2$

q – разность прогрессии

$q \geq 2$.

Также все числа в прогрессии сравнимы по модулю q. То есть если мы рассмотрим все попарные разности $a_i - a_j$ НОК'ов, они все будут делиться на q.

Дальше?