ЛИСТ 1 ИЗ 5 | М1-10-07
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

Задача № 1

1) Пусть у нас есть 3 отрезка длинами a, b и c. Пусть a – наибольшая из ~~сторон~~ из них. Тогда мы можем составить треугольник из этих отрезков, если выполняются эти неравенства: $a-b<c$; $a-c<b$; $|b-c|<a$; это из ниоткуда возьмётся
$a+b>c$, $a+c>b$; $b+c>a$. III, IV и V из них выполняются всегда, т.к. a – наибольшая сторона (а остальные – ненулевые). Остальные три неравенства попарно тождественны (т.к. из каждого можно получить каждое при помощи тождественных преобразований), значит если выполняется одно, то выполняются и другие.

Как? $a+b>c \Downarrow ? a+c>b$ $2+5>3$ но $2+3 \ngtr 5$ =

2) Мы имеем 6 палочек ~~длинами~~. Пусть их длины будут x, y, z, x_1, y_1, z_1. Упорядочим палочки таким образом, что $x \geq y \geq z \geq x_1 \geq y_1 \geq z_1$. В один из треугольников, которые сложил первоклассник входит палочка с длиной x, рассмотрим его. Пусть длины сторон этого треугольника будут x, m, n. При

этом $m \geq n$, тогда $x < m+n$ ~~это~~ это верное утверждение которое мы можем получить из этого треугольника, при этом m – одна из палочек $y, z; x_1, y_1, z_1$, а n – одна из палочек $z; x_1; y_1; z_1$ при этом m и n – две разных ~~элемента~~ палочки и $m \geq n$, тогда $m \leq y$, а $n \leq z$, значит $x < m+n \leq y+z$, тогда $x < y+z$, при этом x мы изначально зафиксировали, как наибольший из отрезков, тогда по рассуждениям 1 все неравенства треугольников для треугольника со сторонами x, y, z выполняются, то есть треугольник со сторонами x, y, z существует, при этом x, y, z — три самых длинных палочки, то есть треугольник из трёх самых длинных палочек ~~су~~ можно составить ~~существует~~ всегда. А треугольник из 3 самых коротких палочек можно составить не всегда, т.к. есть контрпример: палочки длинами 2, 3, 5, 6, 7, 8 (единицы длины). Из них ~~можно с~~ могли быть составлены треугольники (2; 5; 6) и (3; 7; 8). Треугольника (2, 3, 5) не существует ($2+3=5$).

о 1) это не доказано

а треугольник (6; 7; 8) можно составить (6+7>8).

Задача №2

Мы имеем систему из верных неравенств $\begin{cases} x^4-y^4>x \\ y^4-x^4>y \end{cases}$. Упорядочим x, y (мы можем это сделать, т.к. при замене x на y, y на x получим тождественную систему $\begin{cases} y^4-x^4>y \\ x^4-y^4>x \end{cases}$) так, что $x \geq y$. Чтобы $x \cdot y$ было отрицательным, необходимо, чтобы x и y были разных знаков. Допустим, что такое возможно, тогда $x>0$, а $y<0$ (т.к. $x \geq y$), тогда из неравенства $x^4-y^4>x$ получаем $|x|>|y|$ ($x^4-y^4=|x|^4-|y|^4>x>0$), кроме того $|x^4-y^4|>|x|$, т.к. ($\{x \geq 0;\ x^4-y^4 \geq 0;\ x^4-y^4>x$). А из неравенства $y^4-x^4>y$ получаем, что $|y^4-x^4|<|y|$, т.к. $\{y^4-x^4<0$ (т.к. $x^4-y^4 \geq 0$); ~~тогда~~ $y<0$ и $y^4-x^4>y$. Таким образом получаем, что $|x^4-y^4|>|x|>|y|>|y^4-x^4|$, но $|x^4-y^4|=|y^4-x^4|$, значит получили противоречие, наше допущение неверно; x и y одного знака, значит $x \cdot y$ не может быть отрицательным. +

Задача №3

$a=\frac{b(3c-5)}{15}$, при этом $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{N}$. Тогда $b(3c-5)\vdots 15$, значит $b(3c-5)\vdots 3$, но $3c-5 \not\vdots 3$ (т.к. $3c\equiv 0 \pmod 3$, тогда $3c-5\equiv -5\equiv 1 \pmod 3$), тогда $b\vdots 3(3^1)$. Рассмотрим это же уравнение относительно b: $b=\frac{b_1(3c-5)}{15}$, тогда ~~за~~ пусть $b=3x$, тогда $3x=\frac{b_1(3c-5)}{15}$, т.е. $b_1\vdots 9(3^2)$ по аналогичным рассуждениям. Тогда $b_1=\frac{b_2(3c_2-5)}{15}$; $9x_1=\frac{b_2(3c_2-5)}{15}$, значит $b_2\vdots 27(3^3)$ и так далее аналогично $b_k\vdots 3^{k+1}$. Пусть T – множество такое, что $T\subset S$ и каждый ~~~~ такой, что $n\in S$ и $n\vdots 3$, будет принадлежать T, при этом каждый $m\in T$ будет принадлежать S и делиться на 3. Упорядочим все элементы T по показателю степени 3, на ~~которую~~ с 3 в которой делится элемент (3 в максимальной степени, при которой ~~~~ элемент на неё делится, упорядочиваем по показателю). Возьмём максимальный по показателю (допустим, что множество не бесконечно и мы можем это сделать), тогда пусть показатель

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 6 | М1-10-07
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

~~ab~~ Наконец будет 0, тогда сам элемент $9 \cdot 3^d$, тогда $9 \cdot 3^{d} = \frac{h \cdot (3 \cdot l - 5)}{15}$ (где h и l — какие-то элементы S), тогда $h \vdots 3^{d+7}$. Но мы взяли максимальный по показателю в T. Получили противоречие, наше допущение неверно и множество T бесконечно, значит и множество S бесконечно.

Задача №4

+

1	2	3	4	5	Σ
7	6	0	0	0	13

Задача № 6

При сложении двух чисел с равным количеством цифр мы можем получить число, количество цифр которого больше данного максимум на 1 (чем больше слагаемые, тем больше их сумма, ~~тогда~~ если у ~~какого-то~~ числа а больше цифр, чем у числа в, то $а>в$ (ведущих 0 нет), тогда при сложении двух чисел 9999999999 мы получаем 19999999998, т.е. максимальная сумма двух десятизначных чисел. В ней 11 цифр. Любое двенадцатизначное число больше полученной суммы, тогда цифр у суммы не более 11). Тогда всего цифр, выписанных на доске не более 31. Рассмотрим последние цифры всех 3-х чисел. ~~Они могут быть~~ Все варианты их чётности:

а	в	а+в
чёт	чёт	чёт
чёт	нечёт	нечёт
нечёт	чёт	нечёт
нечёт	нечёт	чёт

Таким образом среди них есть хотя бы 1 чётная цифра, тогда на доске может быть выписано не более 30 нечётных цифр. Такой пример есть:

9999999999; 9999999999; 19999999998. Сумма первых двух равна III, наибольшее кол-во нечётных цифр - 30.

 М1-10-07
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача №7

Рассмотрим числа в углах таблицы. Всего остатков от деления на 3 – ~~3~~ три, а чисел четыре. Тогда у хотя бы двух из них остатки от деления на 3 будут равны, т.е. их разность делится на 3.

Назовём путём в таблице последовательность переходов из клетки в клетку (клетки имеют общую сторону), разница чисел в которых равна 3 (по модулю). У пути есть начало (стартовая клетка) и конец (конечная клетка).

Докажем, что между клетками, разница которых делится на 3, есть путь (от меньшей к большей), при помощи мат. индукции.

База: разница равна 3 (по модулю), тогда по условию задачи они имеют общую сторону и путь будет состоять из 1 перехода (по определению пути; из меньшей в большую) ~~стартовая и конечная клетка в данной ситуации значения не имеет, т.е. любая из данных может быть и стартовой, и конечной)~~

Переход: знаем, что есть путь между текущей

(x) и $x+3k$. Докажем, что есть путь между $x+3k$ и $x+3(k+1)$. $x+3(k+1)-x-3k=3$, значит разница между клетками $x+3k$ и $x+3(k+1)$ равна 3, тогда по условию задачи и определению пути можем сделать переход из $x+3k$ в $x+3(k+1)$, тогда путь будут составлять все переходы из x в $x+3k$ и переход из $x+3k$ в $x+3(k+1)$, тогда путь есть ~~(в данной стороне)~~ (из меньшей в большую).

Доказано (базируется на том, что повторяющихся чисел нет, т.к. присутствует каждое,

~~Получаем~~, что между какими-ли двумя условными клетками есть путь, причём начальная равна x, а конечная равна $x+3k$, где k – количество переходов, тогда разница между ними равна $3k$. Введём индексацию строк и столбцов, пусть индекс текущей клетки – i (по строкам), j (по столбцам), тогда индексы начальной клетки $i_н; j_н$, а конечной – $i_к; j_к$. ~~Мы~~ Любыми переходами мы либо увеличиваем разницу между i и $i_к$ или j и $j_к$, либо уменьшаем. Тогда любому действию увеличения можно действие уменьшения

сопоставить!

(т.к. разница и по столбцам, и по строкам должна стать равной 0). Но действий уменьшения будет больше чем действий увеличения, т.к. между начальной и конечной клеткой разница не нулевая, при этом каждые действие являются переходом (число в текущей клетке увеличивается на 3). Тогда чтобы посмотреть ~~кратн~~ делимость переходов на 2 необходимо посмотреть на $|i_н - i_к| + |j_н - j_к|$, т.к. это избыток действий уменьшения
Далее объяснение?
(т.е. действия уменьшения, которые не сопоставляются действиям увеличения (их количество)), ~~тогда~~ а все остальные сопоставляются (их на 2),
почему? Ясное бы...
тогда между угловыми ~~имеющими~~ на одной вертикали или горизонтали избыток равен 8, а между противоположными — 16, тогда кол-во действий (переходов) ~~раз~~ делится на 2 (~~если разница между числами~~ разница между числами — $3k$; $k : 2$?), тогда $3k : 6$, значит всегда существуют 2 угловых, разница между которыми кратна 6.

Задача №9

~~Рассмотрим главную ситуацию~~ Предположим, что фокус может гарантированно удасться при каком-то n, где $n \geq 4$. Рассмотрим ситуацию: карты 1 и 2 не были открыты фокусником или зрителем. ~~Мы сможем Мы~~ Фокусник смог определить положение карт 1 и 2. Ему необходимо определить их порядок. Открыты всего две карты. Порядок можно определить при помощи порядка открытых карт. ~~Это~~ Т.к. могут быть открыты 2 любые карты, тогда все карты (не 1 или 2) должны иметь 1 порядок (под порядком подразумевается упорядоченность). Тогда ~~[illegible]~~ при определенном положении карт 1 и 2 однозначно определяется положение оставшихся. Рассмотрим ситуацию, в которой открыта 1 или 2 и любая другая карта, тогда положение оставшейся (1 или 2) может быть любым, однозначно определить мы его не можем. При этом как-либо ~~определить~~ ~~так~~ договориться с помощником мы не можем, т.к. не знаем изначальное положение 1 и 2 и карты, которые будут открыты. Тогда при $n \geq 4$ фокус не может быть гарантированно удавшимся. Это не так. При этом $n \geq 3$ по условию. При $n = 3$ фокус гарантированно удаётся, т.к. открытые 2 карты, значение последней определяем однозначно. Можем однозначно определить ~~значение~~ положение 2 и 1, значит максимальное n, при котором фокус гарантированно ~~удают~~ удаётся — 3.