Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 3 | М1-10-13
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	0	14

№ 1.

1. Пусть a, b и c – длины самых длинных палочек. и пусть из них нельзя составить треугольник. Если это так, то не выполняется неравенство треугольника. При чём, это точно неравенство для большей стороны, т.к. a, b и c – положительные числа (если это неравенство неверно для какой-то другой стороны, то эта стороны больше наибольшей стороны. Если $x \geq y \geq z > 0$, то $y \geq x + z$ – не верное неравенство).

наименьшей

Для удобства примем $a \geq b \geq c > 0$. Если это не так, то переобозначим длины. Получим неравенство:

$a \geq b + c$

т.к. a, b и c – самые длинные палочки, то a будет больше или равно суммы любых 2-х палочек. Но тогда получим противоречие условию, т.к. не сможем составить один из начальных треугольников.

Тогда треугольник из 3-х самых длинных палочек всегда существует.

2. Треугольник из 3-х самых коротких палочек не всегда существует. Например, если длины палочек 3, 4, 8, 10, 12, 14

$8 > 3 + 4$ – треугольника не существует.

4; 8; 10 – I треугольник ($4 < 18$, $8 < 14$, $10 < 12$)
3; 12; 14 – II треугольник ($3 < 26$, $12 < 17$, $14 < 15$)

Существует 2 треугольника из условия, но не существует треугольника из коротких палочек.

Ответ: из длинных – всегда, из коротких – не всегда.

№ 2

~~1. Пусть $|x| \neq |y|$ (рассмотрим этот случай отдельно позднее)~~

1. Пусть $xy < 0$ существует при каких-то x и y. Значит или $x < 0$ и $y > 0$, или $x > 0$, $y < 0$.

- $x < 0$, $y > 0$

$$\begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ y^4 - x^4 > y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)(x+y)(x-y) > x \\ (x^2+y^2)(x+y)(y-x) > y \end{cases}$$

Заметим, что левые части неравенств - противоположные числа. Тогда, т.к. $y > 0$, а $y^4 - x^4 > y$, то $y^4 - x^4 > 0$. Тогда $x^4 - y^4 < 0$. Обозначим $A = x^4 - y^4$
т.к. $A < 0$, $x < 0$ и $A > x$, то $|A| < |x|$.
т.к. $-A > 0$, $y > 0$ и $-A > y$, то $|A| > |y|$.
Тогда $|y| < |x|$. (*)
$y^4 - x^4 > 0$
$(y^2 + x^2)(y^2 - x^2) > 0$
$y^2 + x^2 > 0$. Можем разделить н-во на $y^2 + x^2$.
$y^2 - x^2 > 0 \Rightarrow y^2 > x^2$
т.к. степень чётная, то получим:
$|y| > |x|$ (**)
(*) и (**) дают противоречие, случай невозможен

- $x > 0$, $y < 0$

Заменив в исходных уравнениях x на y, а y на x получим тот же случай, что разобран выше. Значит, это тоже невозможный случай.

2. Значит x и y не могут быть противоположного знака. Тогда xy не может быть меньше 0.

Ответ: Нет, не может.

+

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 3

М1-10-13
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 3

$a = \frac{b(3c-5)}{15}$

Заметим, что т.к. все числа натуральные, то $3c-5 \not\vdots\, 3$ ($3c-5 \equiv 1 \pmod 3$). Тогда, т.к. $a \in N$, то $b \,\vdots\, 3$

~~Заметим, что при $a = 15$~~ решение есть

~~$15 = \frac{9(3\cdot 10-5)}{15}$~~

~~Тогда будет $b = 5$.~~

~~$a = 3c - 5$~~

ЛИСТ 1 ИЗ 5

М9-10-13
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	5	7	1	0	20

№ 1 (10.6)

Оценка:

Заметим, что всего на доске могло быть записано 30 или 31 цифра. Почему не может быть 32 или более?
Но 31 нечётная цифра на доске быть записана не может, т.к. это значит, что все цифры нечётны. Рассмотрим последние цифры чисел a и b они нечётные и к ним больше ничего не добавляется. Тогда их сумма чётная и нечётных цифр не 31.
Значит, их не больше 30.

Пример:

$a = 5555555555$ (10 неч. цифр)
$b = 5.555.555.556$ (9 неч. цифр)
$a + b = 11.111.111.111$ (11 неч. цифр)

$10 + 9 + 11 = 30.$

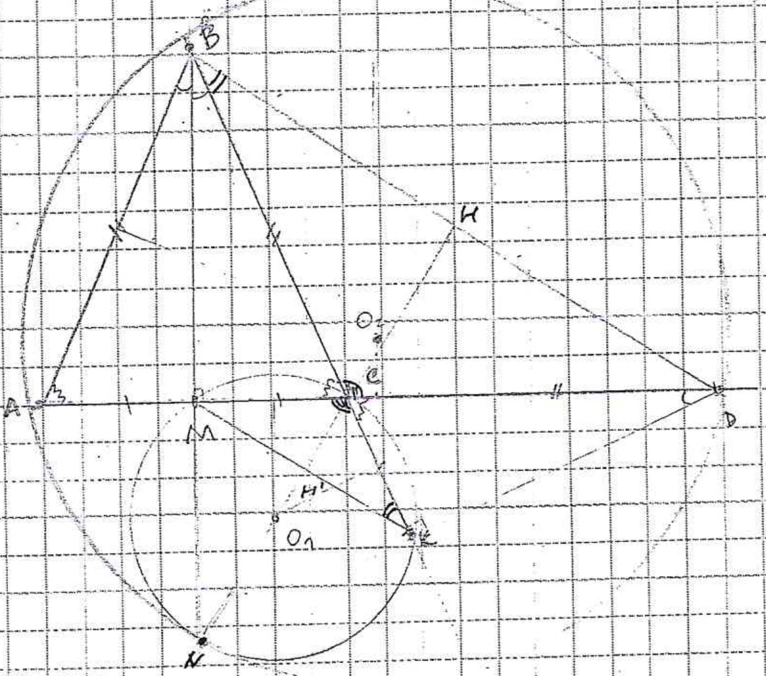
Ответ: 30 нечёт. цифр

№ 3 (10.8)

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$
$AM = MC$, $M \in AC$
$D \in [AC)$, $K \in [B; C)$
$CK = MC$, $CD = BC$
ω_1 - окр. опис. около $\triangle MCK$
ω_2 - окр. опис. около $\triangle BDA$

Д-ть: ω_1 и ω_2 касаются

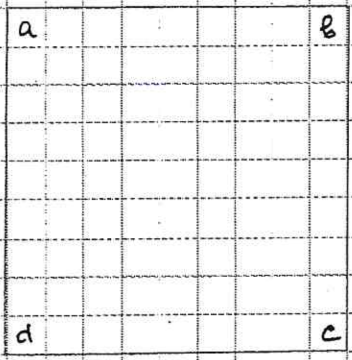
Д-во:



1. Продлим BM и DK до пересечения. $(BH) \cap (DK) = N$ 0+
$\angle BAD = 180° - \angle ABM - \angle MBC - \angle CBD - \angle BDC$ (из $\triangle ABD$)
$\angle BND = 180° - \angle MBC - \angle CBD - \angle BDC - \angle CDK$.
Заметим, что $BA = CD$, $MA = CK$, $\angle BAM = \angle BCM = \angle DCK$ (верт.).
Тогда $\angle MBA = \angle CDK$. Тогда $\angle BAD = \angle BND$. Они оба ~~Они вписанные в ω_2 и опираются~~ опираются на дугу $\smile BD$ в ω_2. Тогда $\angle BND$ тоже вписанный и $N \in \omega_2$
2. $BM \perp AC$ (высота и медиана в равнобедр. треуг.)
$\angle DKC = \angle BMA$ (из равенства треуг. п. 1) где?
Тогда $\angle CMN = \angle CKN = 90°$. $\angle CMN + \angle CKN = 180°$, тогда CMNK — вписанный 4-хугольник. т.к. C, M и K на ω_1, то и $N \in \omega_1$.
3. $\angle NMC = 90°$, тогда NC - диаметр. Тогда (NC) - серед. перпендикуляр к MK, $O_1 \in NC$
$\triangle NMC = \triangle NKC$ по катету и гипотенузе. тогда $MN = NK$.
$BM = DK$ из равенства треуг. п. 1. Тогда $\triangle BND$ - равнобедр.
$\angle MCK = \angle BCD$ (вертикальные), $\angle BCH = \angle KCH'$ (верт.), тогда $\angle HBC = \angle H'KC$.
Тогда $\triangle BDC \sim \triangle MKC$ по 2-м углам.
$\angle MCK$ и $\angle BCK$ вертик., тогда $MK \parallel BD$.
Значит, если $(NC) \perp MK$, то $(NC) \perp BD$, а т.к. $\triangle BND$ равноб., то (NC) - серед. перп. к BD. т.к. ω_2 описана около $\triangle BAD$, то $O_2 \in (NC)$ (сер. перпендик. к стороне.)
5. Тогда точки N, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.
Значит N - точка касания. и N принадл. обеим окружностям

№ 2. (10.7)

1.



Пускай a, b, c и d – числа, стоящие в углах и ~~[illegible]~~ среди них нет 2-х, чья разность делилась бы на 6.
т.е. у них у всех разные остатки от деления на 6. Обозначим:

$a \equiv A \pmod 6$
$b \equiv B \pmod 6$
$c \equiv C \pmod 6$
$d \equiv D \pmod 6$

Заметим, что по принципу Дирихле хотя бы у 2-х из них будет одинаковый остаток от деления на 3 (4 числа и 3 остатка).

2. Разберём 2 случая:
I. равный остаток от деления на 3 у углов на одной стороне (возьмём a и b).

Заметим, что все числа с равным остатком от деления на 3 должны образовывать "цепочку" по стороне, т.к. если они будут расположены 2-мя несвязанными группами, то какие-то числа с разницей 3 не будут рядом.

Тогда a и b соединены такой же "цепочкой" чисел, причём в ней будет нечётное кол-во чисел, т.к. наша "цепочка" будет содержать 9 клеток по горизонталям и чётное кол-во клеток по вертикалям, т.к. a и b на одной "высоте".

Что значит?

Также заметим, что ~~если $a \equiv b \pmod 3$, но у них разные остатки~~ в этой цепочке будут чередоваться остатки от деления на 6 ($a \equiv A \pmod 6$), тогда след. число имеет остаток $A + 3 = B$, а следующее $B + 3 = A + 6$, что сравнимо с A по модулю 6 и т.д.)

??? где здесь гор-ли и вер-ли?

Но т.к. чисел в "цепочке" от a к b нечётное кол-во, то a и b в силу чередования остатков от деления на 6 и нечётного кол-ва чисел в "цепочке" будут иметь равные остатки от деления на 6.

II. равный остаток от деления на 6 имеют противоположные углы (пр: a и c)

Случай разбирается аналогично. В "цепочке" нечётное кол-во чисел, т.к. надо пройти 9 клеток по вертикали и 8 по горизонтали, а все остальные изгибы "цепочки" будут добавлять чётное кол-во клеток к длине. Почему?

3. Тогда у нас ВСЕГДА найдутся 2 угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6.

№ 4 (10.5)

При любых n, если использовать такую стратегию:
1. Разобьём на 2 случая:
~~I на 1 позиции нет карточек 1 и 2. Тогда на эту позицию помощник ставит карточку с номером клетки, где~~

I. На 1 и 2 позициях нет карточек $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$.

Тогда на 1 позицию помощник ставит карточку с номером позиции, где стоит карточка $\boxed{1}$. Например:

4		1	

А затем начиная с $\boxed{3}$ по порядку выставляет карточки после 2. Например:

4		1	2	3

Потом продолжает с первой свободной клетки:

4	5	6	1	7	2	3

Фокусник всегда сначала открывает первую карточку. Т.о. он знает, где $\boxed{1}$ и знает, какой карточки не хватает в последовательности чисел.
Далее зритель открывает одну из карточек. Фокусник сможет найти карточку с номером $\boxed{n}$, а после неё стоит карточка $\boxed{2}$ Зритель может открыть $\boxed{1}$
Пример:

4	8	9	1	10	11	12	2	3	5	6	7

Пусть зритель открыл $\boxed{6}$. Фокусник знает, что последняя $\boxed{7}$, тогда вторая – $\boxed{8}$. Он считает до 12 пропуская $\boxed{1}$ (знает её позицию) и находит 2.

Заметим, что если карточки стоят так: $\boxed{1}\boxed{2}$ то фокусник также определит позицию $\boxed{2}$, зная позицию $\boxed{1}$

II) Если $\boxed{1}$ или $\boxed{2}$ на 1 позиции

Тогда, открыв первую карточку, фокусник знает положение $\boxed{1}$ или $\boxed{2}$.

Помощник кладет карточки по порядку, начиная ~~со~~ после другой карточки. Пример:

1	8	9	10	11	2	3	4	5	6	7

Тогда какую бы карточку не открыл зритель, фокусник найдёт карточку $\boxed{n}$ и карточку $\boxed{1}$ или $\boxed{2}$ (оставшуюся) после $\boxed{n}$.

Так, если зритель откроет $\boxed{4}$ (например), то, сосчитав до 11 (без 1 позиции), фокусник найдёт $\boxed{2}$.

III) Если $\boxed{2}$ на 2 позиции, то сводится к I