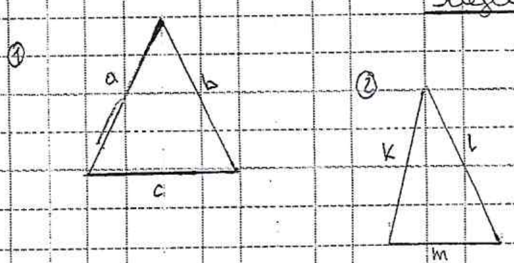
Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 4 | М1-10-16 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 10.1



I группа — 3 самые большие (длинных) палочки
II группа — 3 самые короткие палочки

← два треугольника составленные из 6 палочек

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ
7 | 6 | 7 | 0 | 0 | 20

1) обозначим длину каждой палочки: a; b; c; k; L; m

2) так их упорядочим их по длине: пусть (a) будет наибольшей (может быть палочка равной по длине)
и $a \geq b \geq c$ и $k \geq L \geq m$

3) т.к у нас получились треугольники, тогда $a < b+c$ и $k < L+m$

4) Чтобы доказать, что из 3 самых длинных можно обязательно ~~сделать~~ составить треугольник, надо чтобы $a < x_1 + x_2$, где a – самая наибольшая палочка, а x_1 и x_2 это 2 самые большие среди 5 оставшихся (b; c; k; L; m)
$\Rightarrow x_1 + x_2 \geq b + c$ ($x_1 + x_2$ больше или равна сумме любых 2 из пяти оставшихся)

5) $\left.\begin{array}{l} a < b+c \\ x_1+x_2 \geq b+c \end{array}\right\} \Rightarrow a < x_1 + x_2 \Rightarrow$ обязательно можно составить треугольник из 3 самых длинных +

6) Из трех самых коротких не обязательно можно составить треугольник:

Пример: ($a \geq b \geq c$; $k \geq L \geq m$; $a < b+c$; $k < L+m$ – обязательные условия)

проверяем условие

$a = 20$ $k = 15$ ① $a \geq b \geq c$ ($20 \geq 19 \geq 2$) ✓

$b = 19$ $L = 10$ ② $k \geq L \geq m$ ($15 \geq 10 \geq 6$) ✓

$c = 2$ $m = 6$ ③ $a < b+c$ ($20 < 19+2$) ✓

④ $k < L+m$ ($15 < 10+6$) ✓

Три самых коротких из палочек это: L; m; c, где L-наибольшая
т.к $L \geq m+c$ ($10 > 6+2$) $\Rightarrow$ треугольник составить нельзя.

Ответ: обязательно можно составить треугольник из 3 самых длинных палочек (I группы); не обязательно можно составить треугольник из трех самых коротких палочек (II группы).

+

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 4

М1-10-16
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача №2

$x \neq 0 \quad y \neq 0$

1) $x^4 - y^4 > x$

$+$

$y^4 - x^4 > y$

$x^4 - y^4 + y^4 - x^4 > x + y$

$0 > x + y$ $\quad (x \cdot y \neq 0$ т.к. $x \neq 0$ $y \neq 0)$

2) Допустим $x \cdot y < 0$ $(x \geq y)$ (может равняться отрицательному числу), это может быть, когда $x > 0$ $y < 0$

3) $\begin{cases} 0 > x + y \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > x + y \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

$x > 0 \quad y < 0$

$|x| = |y| \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow 0 \ngtr x + y$

$|x| > |y| \Rightarrow x + y > 0 \Rightarrow 0 \ngtr x + y$

$|x| < |y| \Rightarrow x + y < 0$ ✓

$x^4 - y^4 > x > 0$ и перед.

4) $|x| < |y| \Rightarrow |x|^4 < |y|^4 \Rightarrow |x|^4 - |y|^4 < 0 \Rightarrow x^4 - y^4 < 0$, но по условию $x^4 - y^4 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ наше предположение неверно $\Rightarrow xy > 0 \Rightarrow$ $x \cdot y$ не может быть отрицательным числом

Ответ: произведение $x \cdot y$ не может равняться отрицательному числу

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 4 | М1-10-16
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задание 10.4

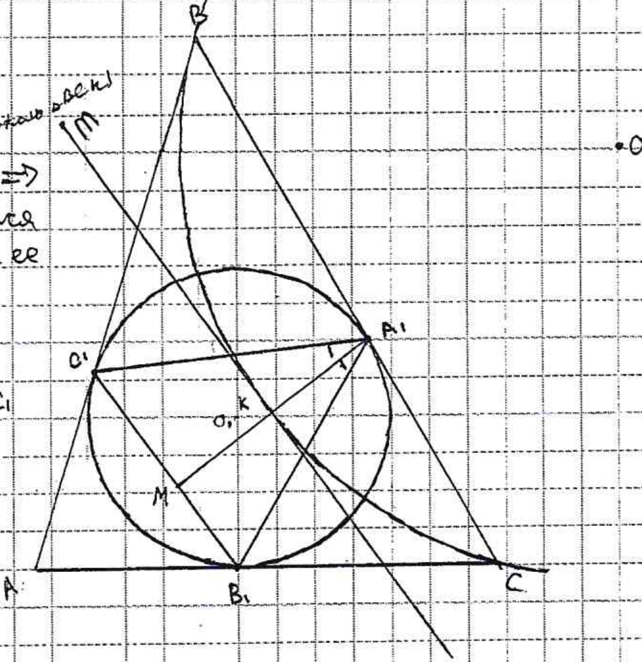
Дано: $\triangle ABC$ - неравноб. ω_1 (O_1; O_1C_1) кас. $\triangle ABC$ сторон AB; BC; AC = C_1; A_1, B_1

m - средняя линия $\triangle A_1B_1C_1$ $m \parallel B_1C_1$ A_1M - бис $\angle B_1A_1C_1$; $A_1M \cap m = K$; ω_2 (O_2; O_2B)
(описана около $\triangle BCK$

Д-ть ω_2 кас. m

Д-во

1) ~~Т.к.~~ $K \in \omega_2$ (ω_2 описана около $\triangle BCK$) ~~т.к.~~ $K \in m$ ($A_1M \cap m = K$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ то если ω_2 касается m, то она касается ее только в т. K



2) Т.к. ω_1 вписан в $\triangle ABC$ $\Rightarrow$
$AC_1 = AB_1$; $CB_1 = CA_1$; $BA_1 = BC_1$

Дальше?

Задание 10.5

Ответ Выиграет Петя при правильной игре

План игры

1) Петя закрашивает полностью одну диагональ (с правой верхней до правой нижней

2) Затем он после хода Васи должен будет

Задача 10.3

$S = \{a; b; c \ldots\}$ ← N

для a любого найдется b и c т.ч.

1) $a = \frac{b(3c-5)}{15}$

2) т.к $a \in N \Rightarrow \frac{b(3c-5)}{15} \in N \Rightarrow b(3c-5) \vdots 15$ и $(3c-5) \in N$

3) т.к $3c-5 \not\vdots 3$ $(3c \vdots 3;\ 5 \not\vdots 3) \Rightarrow b \vdots 3$ ~~и если $c \not\vdots 5 \Rightarrow 3c-5 \vdots 5$ $(3c \not\vdots 5 : 5 \vdots 5) \Rightarrow$~~
$\Rightarrow b = 3k$ $k \in N$ ~~$b \vdots 15$~~

4) по условию также для b найдутся в S числа b_1 и c_1 т.ч

$b = \frac{b_1(3c_1-5)}{15} \Rightarrow 3k = \frac{b_1(3c_1-5)}{15} \Rightarrow k = \frac{b_1(3c_1-5)}{45}$; $k \in N \Rightarrow \frac{b_1(3c_1-5)}{45} \in N$

~~т.к $3c_1-5$~~ $\Rightarrow b_1(3c_1-5) \vdots 45$ т.к $3c_1-5 \not\vdots 3 \Rightarrow b_1 \vdots 9 \Rightarrow b_1 = 9z$, $z \in N$

5) Дальше если мы будем все также рассматривать числа b_n - которые будут кратны 3
(для b_1 найдется b_2 и c_2 т.ч $b_1 = \frac{b_2(3c_2-5)}{15} \Rightarrow b_2 \vdots 27$ и т.д.) $(b_x \vdots 3^{x+1})$
тогда их кратность на 3^x, где x - степень 3 будет возрастать
(x будет увеличиваться $\Rightarrow$ числа вида $b_x = 3^{x+1} \cdot y$ $(y \in N)$
и каждое следующее число b_x должно быть все больше и больше.
будут возрастать $\Rightarrow$ ~~цепочка их~~ чисел будет бесконечно
много в множестве $S \Rightarrow S$ - бесконечное множество

числа b_x это то число, которое будет всегда $\vdots 3^{x+1}$ и которое я рассматр.
в (4) и (5) $(b_1$ и $b_2)$ только b_x - это будет через некоторое количество x, когда я повторяю свой алгоритм

$b_x = \frac{b_{x+1}(3c_{x+1}-5)}{15}$ ~~$b_x \vdots 3$~~

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 4	М2-10-16
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	2	0	16

Задача 10.6

На доске a ; b ; $a+b \in N$ a и b - десятизначные числа

1) т.к. a и b десятизначные числа, тогда их сумма состоит или из 10 цифр (она не может быть меньше a или b), или из 11 цифр (сумма двух самых наибольших 10-значных чисел имеет 11 цифр: $\underbrace{99...9}_{10} + \underbrace{99...9}_{10} = 1\underbrace{99...9}_{9}8$ => следовательно быть больше не может)

2) Пусть Z наибольшее количество нечетных цифр выписанных на доске.

$Z \leq 31$, т.к. Z не может быть больше, чем всего максимально могло быть цифр (a и b - состоит из 10 цифр; $a+b$ - максимум из 11 цифр ($10+10+11=31$))

3) $Z=31$ быть не может т.к если $Z=31$, тогда все цифры нечетные => на конце у выписанных чисел тоже нечетная цифра => a; b; $a+b$ - нечетные числа, но сумма двух нечетных чисел не может быть нечетной (она четная) => противоречие => $Z \neq 31$ => $Z \leq 30$

4) Пример на $Z=30$

$$\begin{array}{rr} a = & 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \\ b = & + \; 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \\ \hline a+b = & 1\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,8 \end{array}$$

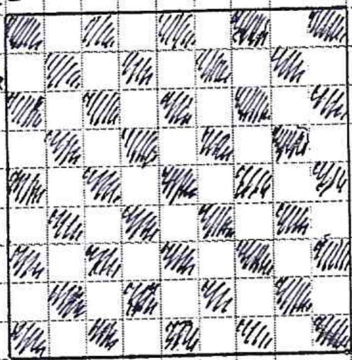
√

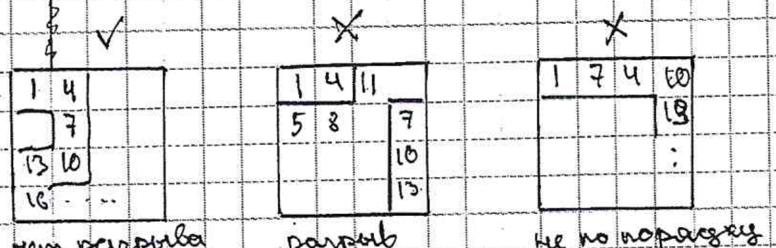
5) т.к. $Z \leq 30$ => $Z=30$ - наибольшее

Ответ $Z=30$ - наибольшое количество нечетных цифр могло быть выписано на доске.

Задача 10.7

1) т.к любые два числа, отличающиеся на 3 стоят в соседних по стороне клетках => если мы выделим все числа вида $3n$, $3n+1$, $3n+2$ то получатся целые цепочки чисел не имеющие разрыва и в этой цепочке будут стоять по порядку (от наименьшего к большему или наоборот)





$3n = 3-6-9-...-78-81$

$3n+1 = 1-4-7-...-76-79$

$3n+2 = 2-5-8-...-77-80$

как будут состоять цепочки

2) раскрасим таблицу 9×9 в шахматную раскраску.

3) рассмотрим угловые клетки: их количество $n=4$, у нас 3 цепочки чисел. Тогда по принципу Дирихле найдутся две угловые клетки в которых будут стоять два числа одной цепочки. (x_1 и x_2; $x_2 > x_1$)

4) т.к все угловые клетки одного цвета (черного), тогда x_1 и x_2 стоят на черных клетках

5) заметим, что между двумя числами одной цепочки, стоящих на разных по цвету клетках, четное число элементов цепочки, а между двумя числами ~~расположены~~ одной цепочки, стоящих на одинаковых по цвету клетках нечетное число элементов цепочки
=> т.к. x_1 и x_2 на одном цвете => между ними нечетное число элементов.

6) Пусть x_1 и x_2 члены цепочки $3n+X$, ($n \in Z$; ($X = 0$ или $X=1$ или $X=2$))

$x_1 = 6k + X$ $\qquad$ $x_1 = 6m+3+X$

$x_2 = 6n + X$ $\qquad$ $x_2 = 6l+3+X$

обязательно найдутся

т.к $x_2 > x_1$ – $n>k$ и $l>m$

$x_2 - x_1 = 6n+X-6k-X = 6(n-k) \vdots 6$

$x_2 - x_1 = 6l+3+X-6m-3-X = 6(l-m) \vdots 6$

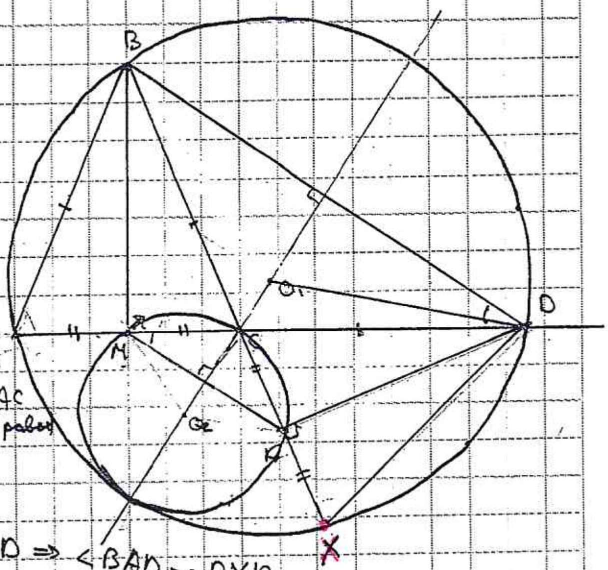
Ответ: обязательно найдутся две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 4 | М1-10-16
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 10.8

Дано: M - сер AC - основание $\triangle ABC$ - равнобед. $\omega_1(O_1; R)$ $\omega_2(O_2; r)$
на прод. AC и BC за т. C $D \in AC$ $K \in BC$ т.ч.
$BC = CD$; $CM = CK$ ω_1 описан. около $\triangle ABD$
ω_2 описана около $\triangle MCK$
Д-ть ω_1 кас ω_2
Д-во



1) рас $\triangle BCM$ и $\triangle CDK$

① $BC = CD$ (по усл) ② $MC = CK$ (по усл) ③ $\angle MCB = \angle KCD$ - верт
$\Rightarrow \triangle BCM = \triangle CDK$ ✓
2) т.к M - сер AC $\triangle ABC$ - равн ? $\Rightarrow$ BM - мед $\Rightarrow$ BM - выс $\Rightarrow$ $\triangle$
$\triangle BCM$ - прям и т.к $\triangle BMA$ - прям BM - общ; $AB = AC$ ($\triangle ABC$ равн)
$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle BCM = \triangle CDK$ ✓ $BM = DK$ ✓

3) $BC \cap \omega_1 = X$; т.к $\angle BXD$ и $\angle BAD$ опир на BD $\Rightarrow \angle BAD = \angle BXD$ ✓
Опр!
прямоуг
4) рас $\triangle ABM$ и $\triangle DKX$; $DK = BM$; $\angle BAD = \angle BXD \Rightarrow \triangle ABM = \triangle DKX$?

$\triangle ABM = \triangle DKX = \triangle BCM = \triangle CDK \Rightarrow AC = BC = CD = XD$ | $AM = MC = CK = KX$ ✓

5) рас $\triangle MCK$ и $\triangle BDC$

$$\left.\begin{array}{l} MC = CK \\ BC = CD \end{array}\right\} \Rightarrow MC \cdot BC = CK \cdot CD \Rightarrow \frac{MC}{CD} = \frac{CK}{BC};\ \angle MCK = \angle BCD \text{ (верт)} \Rightarrow \triangle MCK \sim \triangle BCD \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle CMK = \angle CDB \Rightarrow$
т.к. это накрест леж. углы при MK и BD
и сек. MD $\Rightarrow$ $MK \parallel BD$ ✓

6) т.к $\triangle MCK$ и $\triangle BCD$ - равн $\Rightarrow$ (высоты и медиан совпад) $\Rightarrow$ они являются серединными перпенд. к основанию и проходят через O_1 и O_2 $\Rightarrow$ $CO_2 \perp MK$; $CO_1 \perp BD$; $MK \parallel BD$ и общая $\Rightarrow$
O_2, C, O_1 - на одной прямой ✓
$\Rightarrow O_1D = O_1O_2 + O_2K \Rightarrow O_1O_2 = O_1D - O_2K$ как ?
7) Для того, чтобы доказать, что ω_1 кас. ω_2 (можно понять что изнутри)
тогда $O_2O_1 = R - r = O_1D - O_2K \Rightarrow \omega_1$ кас ω_2

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 4 ИЗ 4

М1-10-16
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 10.9

Ответ: фокус может удастся при n-любом ($n \geq 3$)

Стратегия

~~обозначим~~ пронумеруем каждую клетку ряда слева направо

1 2 3 .. x ..... n
| X |

1) Фокусник будет ~~ст~~ переворачивать всего n карточек самую первую слева
пусть там окажется карточка с номером X
① вар $X \neq 1$ $X \neq 2$
2) Помощник положит карточку с номером X в первую клетку ряда т.ч $(X-2)$ означало сколько ~~чисел~~ карточек с номерами не равными 1 и 2 между ~~ти~~ карточками с номерами X и 1 (это помощник может всегда сделать т.к карточек с номерами не 1 и 2 у нас $(n-2)$)

2) зная число X, он сможет точно утверждать, что 1 либо на карточке ~~под номером~~ $(X-1)$ по счету (если 2 стоит после 1) и в клетке X в клеточке
~~если~~ ~~X~~ по счету (если 1 стоит после 2)

3) зритель переворачивает карту

Задача 10.10

Т.к всего n чисел $\Rightarrow$ пар будет $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ пар
Да, а что дальше?