Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 5 | М1-10-~~19~~ ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	1	15

№10.2 ~~может ли~~ возможно $xy<0$?

$x^4-y^4>x$

$y^4-x^4>y$

1) для того, чтобы $xy<0$ нужно: $\begin{cases}x<0\\y>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}$. пусть $\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}$

(для $\begin{cases}x<0\\y>0\end{cases}$ решение будет аналогично, т.к. оба неравенства представляют аналогич. функции $x(y)\equiv y(x)$)

2) если $x>0 \Rightarrow x^4-y^4>0 \Rightarrow x^4>y^4 \Rightarrow |x|>|y|$

тогда $y^4-x^4<0$, т.к. $|y|<|x| \Rightarrow y^4<x^4$

3) пусть: ~~пусть~~ $|x^4-y^4|=|y^4-x^4|=|\alpha|$

4) $y^4-x^4>y \,|\cdot(-1) \Rightarrow \underbrace{x^4-y^4}_{>0}<\underbrace{-y}_{>0}$

$\Downarrow$

$|x^4-y^4|<|y| \Rightarrow |\alpha|<|y|$

5) при этом: $\underbrace{x^4-y^4}_{>0}>\underbrace{x}_{>0} \Rightarrow |x^4-y^4|>|x| \Rightarrow |\alpha|>|x|$

6) получаем, что $|y|>|\alpha|>|x|$, но из (2) $\Rightarrow |x|>|y|$

$\Downarrow$

$|y|>|x|$

получили противоречие

+

Ответ: Нет, не может.

№10.1

Пусть даны палочки размеров: a, b, c, d, e, f. Предположим, что $a - max \Rightarrow a\geq b,c,d,e,f$, а $e - min \Rightarrow e\leq a,b,c,d,f$.

для a точно существуют такие b и c, что $a<b+c$, т.к.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 5

М1-10-19
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

в начале он составил Δ-ки. ~~Если~~ Рассмотрим 3 варианта:

были Δabc и Δdef

1) a, b, c – группа длин. палочек => из них можно сост. Δ.

2) a, b, d – гр. длин. пал. => $d \geq c$ => $d+b \geq b+c > a$ и $a+b > d$, т.к. $a \geq d$

(с палочкой b аналогично)

3) a, d, f – гр. длин. пал. => $d \geq c$, $f \geq b$ => $d+f \geq c+b > a$ и $a+f > d$, $a+d > f$ т.к. $a \geq d$, $a \geq f$.

⇓

(I)

в группе длинных палочек всегда ~~мож~~ можно составить Δ.

(II)

в группе коротких палочек не всегда можно составить Δ. Контрпример: $a=9$ $b=8$ $c=3$ $d=7$ $f=6$ $e=2$

в первый раз Δ таковы: 2,6,7 и 3,8,9

группы I и II таковы: I: 7,8,9 II: 2,3,6

из палочек со сторонами 2,3,6 нельзя сост Δ ($2+3<6$)

(правило: сумма двух сторон Δ-ка всегда больше третьей стороны)

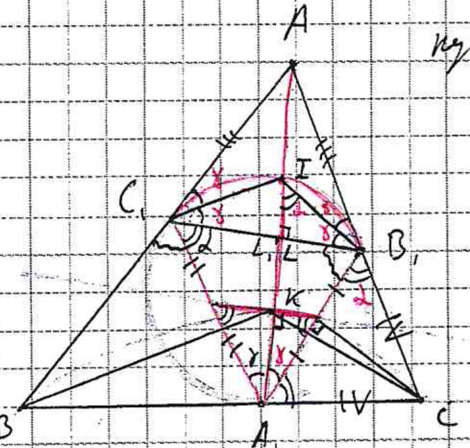
№10.4. Решение:

Дано: ω окр-ть $(O; r)$ вписанная в $\triangle ABC$. ~~ABC~~ / $\triangle ABC$ — не р/б
$\omega \cap AB = C_1$
$\omega \cap BC = A_1$
$\omega \cap CA = B_1$
m — ср. линия $\triangle A_1B_1C_1$
A_1L_1 — бисс-са $\triangle A_1B_1C_1$ $(\angle B_1A_1C_1)$

A_1L_1? или всё-таки AL?

$L_1 \in [C_1B_1]$
$A_1L_1 \cap m = K$

Док-ть: окр-ть ω_1 описанная около $\triangle BCK$ касается m.



пусть $AI \cap C_1B_1 = L$

1) пусть $\angle B_1A_1L = \gamma$, $\omega \cap AL = I$, $\angle B_1C_1A_1 = \alpha$

2) $\angle B_1A_1L_1 = \cup IB_1 \cdot \frac{1}{2} = \angle IC_1B_1 = \gamma$?

3) $\angle C_1A_1L_1 = \cup IC_1 \cdot \frac{1}{2} = \angle IB_1C_1 = \gamma$

4) $\angle B_1C_1A_1 = \frac{1}{2} \cup B_1A_1 = \angle B_1IA_1 = \alpha$

5) $\triangle C_1AB_1$ — р/б (осн C_1B_1) т.к. $AC_1 = AB_1$ как отрезки касающихся, провед из одной точки A

6) $\angle AB_1I = \frac{1}{2} \cup IB_1$ как угол между хордой и касающ.
$\angle AB_1I = \gamma$ ($\angle AC_1I = \gamma$ аналогично)

7) в $\triangle C_1AB_1$ проведём медиану AL, кот. будет высотой $\Rightarrow$ $\Rightarrow AL \perp C_1B_1$. Для $\triangle C_1IB_1$ это тоже будет медиана, т.к. она делит C_1B_1 пополам и высота, т.к. $\triangle C_1IB_1$ — р/б. $\Rightarrow$ $\Rightarrow I \in AL$, т.к. имеют общ. т. L и $\perp C_1B_1$ ($IL \perp AL$)

т.о. L — середина B_1C_1. Значит, там L_1? Если же там L, то почему AL — медиана (и высота)?

8) из $\triangle ILB_1$: $\gamma + \alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \gamma + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$

9) $\angle A_1B_1C = \frac{1}{2} \cup B_1A_1 = \alpha$ ($\angle$ меж. хордой и касающ.)

10) $\angle C_1B_1A_1 = \angle B_1C_1A_1 = \frac{1}{2}\cup C_1A_1$

11) $L \equiv L_1$, т.к. $I \in AL$, $I \in A_1L$

12) $\angle C_1LA_1 = 180° - \alpha - \gamma = 90° \Rightarrow A_1L$ - высота, но она и медиана $\Rightarrow \angle A_1C_1B_1$ - р/б

Совсем не обязательно!

13) $A_1L_1 \perp C_1B_1 \parallel m \Rightarrow A_1K \perp m$

14) $\angle KA_1C = \gamma + \alpha = 90° \Rightarrow KA_1$ - высота $\triangle BKC$. ~~если~~ $\Rightarrow$

$KA_1 \perp m$, $KA_1 \perp BC \Rightarrow$ если m касается $\omega_1 \Rightarrow$, что $(KA_1) \equiv$ прямой, на кот. леж. диаметр $\omega_1 \Rightarrow KA_1$ - сер. перпендик $\triangle BKC$ и высота $\triangle BKC \Rightarrow KA_1$ - медиана и высота $\Rightarrow$ $BA_1 = A_1C \Rightarrow$ бисс-са AA_1 $\triangle ABC$ явл медианой $\Rightarrow \triangle ACB$ - р/б это не так. $\Rightarrow m$ не касается ω_1

№10.5

Ответ: побеждит Петя.

(100кл)

! Первым ходом Петя закрывает диагональ квадрата и делит поле на 2 равные части. (Лемма: мальчикам за каждый ход перекрывать максимально возможное кол-во клеток, т.к. позволяет оставить противнику меньше вариантов) В каждой части по 49950 клеток.

! После хода Васи, перекрывающего столбец (строчку) из 99 на одной половине, Петя перекрывает диагональ в 99 клеток на другой половине. Каждый раз они будут перекрывать на 1 клетку меньше $\Rightarrow$ после 1го хода Пети они сходят по 99 раз $\Rightarrow$ Вася сходит 99 раз, а Петя - 100 раз $\Rightarrow$ для 100-го хода Васи клеток не останется $\Rightarrow$ Петя победил

После каждого хода Васи на одной половине Петя ходит на другой половине

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 5 | М1-10-19
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№10.3

$a = \frac{b(3c-5)}{15}$ уравним bc с a

$bc > a$
$bc > \frac{3bc - 5b}{15}$
$15bc > 3bc - 5b$
$12bc > -5b$
$12c > -5$
> 0

~~Для~~ Для каждого N числа найдутся 2 N числа, произвед. кот > этого числа

Это не озн., что мн. кон.

1	2	3	4	5	Σ
7	6	7	0	0	20

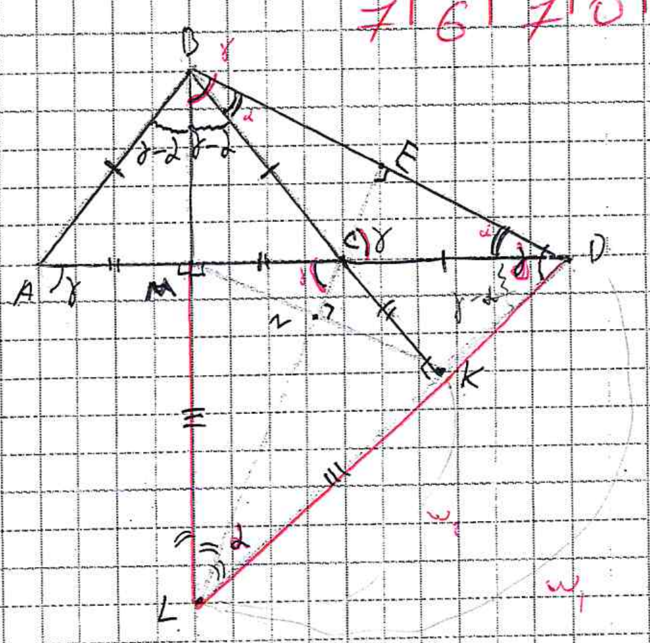
№10.8

Решение:

Дано:
р/б △ABC
AB = BC

M ∈ [AC]
AM = MC
D ∈ [AC)
D ∉ [AC]
K ∈ [BC)
K ∉ [BC]
BC = CD
CM = CK
~~Найти~~:
ω_1 - окр-ть, опис около △ABD
ω_2 - окр-ть, опис около △MCK

Док-ть:
ω_1 и ω_2 - касаются



1) постр △BLD | [DM) ∩ [DK) = L

2) △BCD - р/б (осн BD) => ∠CBD = ∠CDB (т.к. BC = CD)

3) △CBM = △CDK по 2-м сторонам и углу меж ними (BC = CD, MC = CK, ∠MCB = ∠KCD как вертик.) => ∠MBC = ∠KDC

4) ∠LBD = ∠MBC + ∠CBD = ∠KDC + ∠CDB = ∠LDB => △LBD - р/б (осн BD)

5) из (3) => BM = DK. из (4) => LB = LD.
LM = LB - MB = LD - KD = LK => △LMK - р/б (осн MK)

6) опустим медианы △MLK и △MCK на сторону MK в т. N (N - середина MK)

7) LN ⊥ MK (т.к. LN - высота, т.к. △LMK - р/б), CN ⊥ MK (аналогично)
LN и CN имеют общ. точку и ⊥ ~~одному~~ одному и тому же отрезку => N ∈ [LC]

8) постр т. E | [LN) ∩ [BD] = E. LE явл. бис-сой ∠MLK ≡ BLD =>
=> LE - бис-са р/б △BLD => LE - высота △BLD.

9) C ∈ [LE] (т.к. (LE) ≡ (LN) и L, N, C лежат на одной прямой) =>
=> CE - высота △BCD.

~~10) 6) постр [AL]. $\triangle ALC$ - р/б (т.к.~~

10 6) пусть $\angle ELD = \alpha$, $\angle BDL = \gamma$. => из $\triangle EDL$: $\alpha + \gamma = 90°$

11 7) $\triangle ABL = \triangle CBL$ по 2-м сторонам и $\angle$ меж. ними (BM - медиана и бисс-са р/б $\triangle ABC$ => $\angle ABL = \angle CBL$, $AB = BC$, BL - общ.)

12 8) $AL = LC$ (из 7) => $\triangle ACL$ - р/б => LM - медиана и биссектриса => $M \in [BL]$, т.к. $BM \perp AC$, $LM \perp AC$, $BM \cap ML = M$

13 9) LM - бисс-са $\triangle ALC$ => $\angle ALM = \angle MLC = \angle CLK = \alpha$.

14 10) в $\triangle LBE$ $\angle LBE = 90° - \alpha = \gamma$. в $\triangle LMC$ $\angle MCL = 90° - \alpha = \gamma$
$\angle MCL = \angle ECD = \gamma$ как верт. в $\triangle ECD$ $\angle EDC = 90° - \gamma = \alpha = \angle CBE$.

15 11) $\angle MBD = \gamma - \alpha = \angle MBL$ (BM - бисс-са)

16 12) сумма противолеж. углов 4/y-ка ABDL $\angle ABD + \angle ALD =$
$= \angle ADL + \angle LBD + \angle ALM + \angle MLC + \angle CLK = \gamma - \alpha + \gamma + 3\alpha = 2(\gamma + \alpha) =$
$= 180°$ => около ABDL можно опис окр-ть ω_3.

17) $\omega_3 = \omega_1$ т.к. имеют 3 общ. точки A, B, D.

18) ~~[illegible]~~ $\triangle LCM = \triangle LCK$ по 3-м сторонам => $\angle LMC =$
$= \angle LKC = 90°$. сумма противолеж. углов 4/y-ка LMCK =
$\angle LMC + \angle LKC = 90° + 90° = 180°$ => около LMCK можно опис. окр-ть.

EC - сер. перпен. BD

19) радиус ω_1 лежит на (EL) т.к. ~~E середина~~ BD и ~~[illegible]~~
(т. пересеч. сер. перп. в $\triangle$ = т. окр. опис около $\triangle$.)

20) радиус ω_2 лежит на (EL) т.к. CN - ср. перп. MK.

21) радиусы ω_1 и ω_2 и $L = \omega_1 \cap \omega_2$ лежат на одной прямой => ω_1 не касается ω_2

№10.6

Н – нечёт число/цифра при сложении Н+Н = Ч
Ч – чёт. число/цифра $(2k+1+2n+1 = 2k+2n+2 \vdots 2)$

Докажем, что кол-во нечёт цифр < 31

$$\begin{array}{r} + \text{НННННННННН} \\ \text{НННННННННН} \\ \hline \text{ННННННННННН} \end{array}$$

если все цифры a и b – нечёт Только в таком случае?
и a, b > 4999999999, то в числе (a+b) будут 11 цифр и в идеале всё нечёт. В разряде единиц происходит сложение Н+Н по другому можно? => в разряде единиц числа (a+b) точно будет чёт число т.к. Н+Н = Ч.
В остальных разрядах может остаться нечёт, если а сумма цифр a и b предыдущ разряда > 9, т.к. Н+Н+1 = Н. => кол-во Н. цифр < 31.
На примере можно показать вариант с 30 нечёт цифрами. Это будет необходимо и достаточно.

$$\begin{array}{rl} + 9999999997 & - a \\ 9999999999 & - b \\ \hline 19999999996 & - a+b \end{array}$$

Ответ: 30.

№10.7

Разобьём числа на 3 группы:
(деление по ~~приз~~ остатку от деления на 3)

I	II	III
3n+1	3n+2	3n
1	2	3
4	5	6
7	8	9
⋮	⋮	⋮
79	80	81

Каждая из групп представляет собой „змейку" (предыдущий член за следующим). Можно сказать, что „змейка" - ~~алгеб.~~ арифм. прогр. с ~~част.~~ разностью $= 3$ $\{(I: a_1=1;\ II: a_1=2,\ III\ a_3=3)$

Так, как члены не могут чередоваться, но при этом должны отличаться на 3.

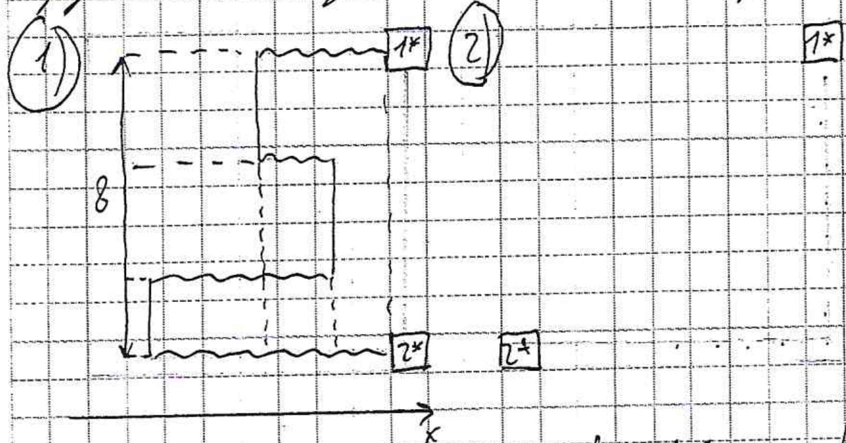
Из-за того, что группы 3, а углов 4 => одна группа будет занимать минимум 2 угла. => всегда можно будет взять разность членов из одной группы.

I: $3n+1-3k-1=3(n-k)\ \vdots\ 3$

II: $3n+2-3k-2=3(n-k)\ \vdots\ 3$

III: $3n-3k=3(n-k)\ \vdots\ 3$ $\qquad n,k\in N$

Для того, чтобы $3(n-k)$ делилось на 6 нужно, чтобы $(n-k)\ \vdots\ 2$. Рассмотрим 2 случая: 1) члены одной группы находятся в соседних углах; 2) в противополож.



1) минимальная разность $n-k=8$ если змейка идёт по прямой от 1* до 2*. Каждое отступление вправо или влево будет компенсироваться отступлением влево или вправо, т.к. координата по X не меняется => ?

+.

$\Rightarrow (n-k)=8-2m\ \vdots\ 2,\ m\in N$ (где m кол-во отступлений в одну сторону)

2) минимальна разность $n-k=16$

по аналогии с (1) каждое отступление вверх будет компенсироваться отступом ~~вниз~~ влево вправо ~~вверх~~ вниз, и наоборот $\Rightarrow (n-k)=16-2t\ \vdots\ 2,\ t\in N$

~~(где t кол-во отступлений~~

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 5

М1-10-13
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$\Rightarrow 3(n-k) \vdots 6$

Ответ: Да, верно.

№10.9

Ответ: при $n \vdots 2$ Почему? И где пример?