Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 5

М1-10-27
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	2	0	0	16

Задача №2

Произведение $xy<0$, если 1 из чисел меньше 0, а второе больше. Т.к условие симметр. относительно x и y, то наше док-во невозм данного факта при $x<0$, $y>0$ докажет и то, что при $y<0$ и $x>0$ ответ будет тем же.

Докажем от противного.

$\exists$ ~~...~~ $xy<0 \Rightarrow x<0, y>0$ (или наоборот, это неважно)

По усл выпол нерав-ва:

$x^4-y^4>x$

$y^4-x^4>y$

Сложим ~~левые и правые~~ большие и меньшие части нерав.

$0>x+y$

Т.е $x+y$ - отр число $\Rightarrow |x|>|y|$, но в таком случае $y^4-x^4<0$, тк четв степень числа большего по модулю больше. Но по усл $y^4-x^4>y$, а $y>0$.

Получаем противоречие $\Rightarrow$ предп неверно $\Rightarrow$ произв. xy не может быть отриц. +

Задача №1

~~[illegible]~~ Обозначим длины спичек в I треуг как a, b, c; а во втором как d, e, f. ~~[illegible]~~ Условие возможности состава треуга из 3 спичек — сумма длин любых двух больше длины 3-ей

1 Вопрос

Есть 2 варианта располож ~~[illegible]~~ спичек после перразбиение на группы: 1 - ничего не поменялось 2 - ~~[illegible]~~ обмен 1 спички из группы (обмен 2 спичками — это то же, что и обмен 1, просто если рассм ситуацию с другой стороны).

Тогда при 1 вар-те очевидно, что треуг можно будет сост (тк группы не изменились). ~~а при 2 вар-те~~ При ~~[illegible]~~ 2-ом вар-те у нас ~~образования~~ произошло такое преобразование

$abc,\ def \longrightarrow \underset{\text{короткие}}{abd},\ \underset{\text{длинные}}{cef}$ (те $d \leq c$)

Для того, чтобы из длинных можно было сост треуг должны выполн нерав-ва: (тк в 1 разб. треуг можно было сост)

$c+e>f$ — это верно, тк по усл $d+e>f$, а $c \geq d$ те $c+e \geq d+e > f$

$c+f>e$ — это верно тк по усл. $d+f>e$, а $d \leq c \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow f+c \geq d+f>e$

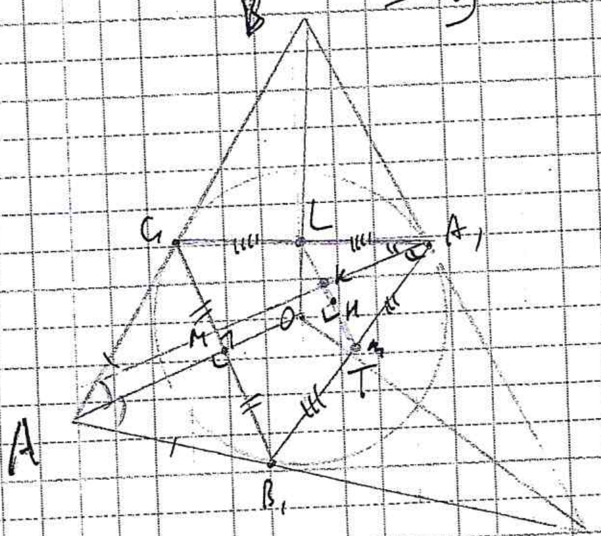
$e+f>c$ — это верно тк $\underbrace{e+f>a+b}_{\text{тк спички I гр. длиннее}} \underbrace{> c}_{\text{из I усл}}$

Таким образом из длинных спичек всегда

можно сост. треуг.
Из коротких спичек необязательно можно сост треуг, есть контрпример:

1, 3, 3 — можно сост. треуг
2, 4, 5 — можно сост треуг
⟶ 1, 2, 3 — 3, 4, 5
1 + 2 = 3 ⇒ ⇒ нельзя сост треуг

Задача №4



Дано: $\triangle ABC$, $\omega(O; r)$ впис в $\triangle ABC$
$\omega \cap AB = C_1$, $\omega \cap BC = A_1$, $\omega \cap AC = B_1$,
m – ср лин в $A_1B_1C_1$, $m \parallel B_1C_1$
бис $\angle B_1A_1C_1$ пересек m в K.
Д-ть: ω, опис ок $\triangle BCK$ касается m

Док-во: AO – бис (по св-ву центра впис окр), $AO \cap B_1C_1 = M$
$AC_1 = B_1A$ (по теор об отр касат) ⇒ $\triangle AC_1B_1$ – равноб ⇒ A_1C_1 и A_1B_1
⇒ AM – высота и медиана (по св-ву равноб тр) (бис BO и CO пересек в точках L и T; L, T – серед A_1C_1 и A_1B_1 аналогично)
~~$\parallel AO$~~ $m \parallel B_1C_1$ (как ср лин) ⇒ $AO \perp m$

Задача №3:

В мн-ве S обязат есть число 15, а числа кратн 15 получ. только через большие числа кратн 15 ⇒ S бесконечно

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 4 ИЗ 5 | М1-10-27
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

~~Задача №3.~~

~~Докажем, что в мн-ве S есть ~~краткое~~ число 15.~~

~~Доказат.~~

~~$a = \frac{b(3c-5)}{15}$. Из данного рав-ва можно сдел~~

~~вывод, что $b \vdots 3$, тк $3c-5 \vdots 3$ ~~$\forall c \in N$~~ краткое~~

~~Если в мн-ве нет числа 15, то~~

~~$a = \frac{b(3c-5)}{15}$ $15a = b(3c-5)$~~

~~$b \vdots 3$, $c \vdots 5$ $15a = 3h\cdot(5k-5) = 5\cdot 3h(k-1) = 15h(k-1)$~~

~~$b = 3h$, $c = 5k$ $a = h(k-1)$~~

~~При наличии в мн-ве числа 15, мн-во будет бесконечным, тк число, котор. явл степенью 15 можно предст в виде $\frac{b(3c-5)}{15}$ только через след степень 15.~~

~~$15^n = \frac{b(3c-5)}{15}$~~

~~$15^{n+1} = b(3c-5)$ $b \vdots 3$, тк $3c-5 \vdots 3$ $\forall c$~~

~~$b = 3^{n+1}\cdot 5^{\alpha}$~~

~~$3c - 5 = 5^{n+1-\alpha}$~~

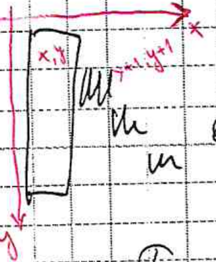
~~$3c = 5^{n+1-\alpha} + 5$~~

~~$c = \frac{5^{n+1-\alpha}+5}{3} = \frac{5(5^{n-\alpha}+1)}{3}$~~

Задача №5.

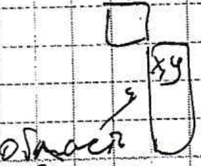
Тактика Пети:

После того как Вася ставит свою фигуру,



Петя закрыли диагональку начиная от точки $(x+1, y+1)$ (если верхняя закр), Васей клетка или коорд $(x; y)$. ~~Если~~ тик

Тогда среди по окончанию у нас остаются область для 1 закр Васи (не с левого бока)



Тогда рассм коорд ~~(0;0)~~ $(x-1; y-1)$ для каждой области после нашего посл хода имеет ли области.

Если туда ставила Петя, то он бы закрасил и $(x; y)$; если бы туда ставил Вася то Петя бы закрасил ее по тактике. Таким образом область может оказаться только левый столбик. (если верхн строк?) ~~Если она не осталась Петя победил,~~ (~~тогда~~ Нужно найти ход Пети в 1 ход в 1 столб. чтобы он всегда побеждал

Если тик $(x; y-1)$ закр, то закрасим точку $(x-1, y-1)$ (она точка есть, иначе (x, y) была бы закр

И почему же эта стратегия ведет к победе?

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 4 | М1-10-27
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	7	Σ
7	5	4	0	0	~~16~~ 16	

Задача №6.

Предп. Все запис на доске цифры — нечетны, тогда посл цифра a, посл цифра b и посл цифра a+b — нечетн => при сложении 2 нечетн чисел получилось нечетное, что невозможно т.е. кол-во нечетн цифр хотя бы на 1 меньше кол-ва написанных. Тк a и b — десятизначные, то a+b или одиннадцатизн или десятизн. Тогда по приведенной ранее оценке кол-во нечетных цифр — не более 30.

Пример: 9999999999,
7777777777, } 30 нечетн цифр.
17777777776

Задача №7

Тк каждые 2 числа отл на 3 стоят рядом, то ~~всю доску можно предст~~ ~~Все числа имеющие вид~~ ~~3k~~ 3k-2, 3k-1, 3k все числа можно разбить на 3 группы: 3k-2, 3k-1, 3k, $k \in N$
Каждая такая группа будет представлять собой на доске „змейку" (т.е. будут иметь вид нерар. ломаной) (причем каждое послед. (если начин с 1, 2 и 3 соотв) будет на 3 больше предыд).

Тк группы всего 3, а угловых клеток 4, то найдутся хотя бы 2 угл клетки, числа в которых будут из 1 группы. Пусть $(x_1;y_1)$ - коорд 1 (с меньшим числом) угл клетки этой группы, а $(x_2;y_2)$ - коорд 2 угл клетки этой группы (с большим (или средн, если угл клеток 3)). Также возможен вар-т (1;1)(9;9) и (9;9;1;1) (9;1)(1;9) (1;9)(9;1)

Какими могут быть x_1, y_1, x_2, y_2: — 1 или 9. Очевидно что вар-т (1;9)(9;9) - тоже, что и (1;9)(1;1); (9;1)(9;9); (9;1)(1;1), тк. отличаются только 1 коорд и на одинак число.

Докажем почему для всех этих вар-тов разность в них будет делится на 6.

Как было сказано ранее, все элементы группы строго увелич на 3 (если счит с 1, 2 или 3 соотв). Тогда пусть у меньшего угл элем номер в группе k_1, а у второго k_2. Тк когда мы в змейке переходим от 1 числа к след оно увелич на 3, а его координата меняется на 1. Т.е. как бы змейка не располагалась, если есть элементы разница между коорд которых четна, то и разность их номеров будет четна. Почему?

Тк в ~~коорд разност~~ разность коорд угл клеток - 8 (при (1,9)(9,9) и подобных) или 18 (при (1,1)(9,9) и подобных), то

ломанные змейки?

и разность номеров будет четн. А тк мы считаем эл-ты от ~~з~~ меньшего к большому то k-ый элем равен $3k-h$ (где h — номер группы от 0 до 2)

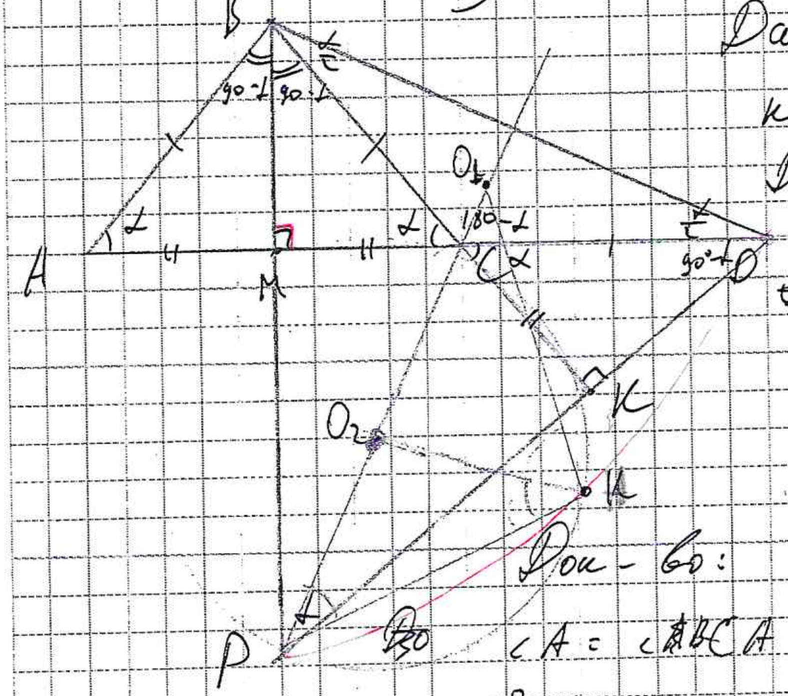
~~$(3k_1 - h) - (3k_2 + h)$~~ =

$3k_1 - h - 3k_2 + h = 3(k_1 - k_2)$

$(k_1 - k_2) \vdots 2$ по доказ. выше $\Rightarrow 3(k_1-k_2) \vdots 6$

Таким образом такие 2 клетки обязат найдутся.

Задача №8.



Дано: $\triangle ABC$ — равноб на прод AC и BC за C, D и K, такие что $CD = BC$, $CM = CK$

ω_1 — опис ок ABD

ω_2 — опис ок MCK

ω_1 касается ω_2

Док-во: $BM \cap DK = P$

$\angle A = \angle BCA = \alpha$

BM — медиана равнобтр $\Rightarrow$ бис и выс

$\angle ABM = 90 - \alpha$, $\angle MCB = \angle KCD = \alpha$ (как вертик), $\angle DCB = 180 - \alpha$ (как смежн),

$\triangle BCD$ — равноб $\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB = \frac{\alpha}{2}$

$\triangle MBC = \triangle KDC$ (по 2 стор и углу) $\Rightarrow \angle CKD = 90°$, $\angle CDK = 90 - \alpha$

$\angle BPD = 180° - 90 + \alpha - 90 + \alpha$ ~~...~~ $- \alpha = \alpha$

$\angle P = \angle A \Rightarrow ABDP$ — вписс. $\Rightarrow P \in \omega_1$

$\angle PMC + \angle BKP = 90^\circ$ $\xcancel{180^\circ} = 180^\circ$ $\Rightarrow MCKP$ — вписан $\Rightarrow$

$\Rightarrow P \in \omega_2 \Rightarrow$ ~~ω_1 касается ω_2 в точке P.~~

$\omega_1 \cap \omega_2 \neq \varnothing$ +

Докажем, что ω_1 и ω_2 ~~имеют не пер.~~ не имеют 2-ой общей точки. Тк ω_1 опис около PBD а ω_2 опис около PMK $\Rightarrow$? центры лежат на бис угла P ? $MC = CK$?

$\angle PMC = \angle PKC = 90^\circ$, $PK = PM$ (тк $DK = DM$ (по док ранее) $\angle PBD = \angle PDB$) $\Rightarrow$ $PMCK$ — дельтоид $\Rightarrow$ да, и что?

✓ $\Rightarrow PC$ — биссектр.

$O_1, O_2 \in PC$,

$\exists K \in \omega_1, \omega_2$ тогда $O_2K = O_2P$ (как радиусы ω_1) $\Rightarrow$?пр.!

$\Rightarrow \angle O_1KP = \angle O_1PK$, $O_2K = O_2P \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2KP = \angle O_2PK \Rightarrow \angle O_1KP = \angle O_2KP \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1$ и O_2 совп — получили противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega_1 \cap \omega_2 = P}$

Ч и т.д.