Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 5

М-1-11-07
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	0	14

Задача (1)

• $10^4 \vdots 625$ и $10^4 \vdots 40$, $\Rightarrow$ остатки mod 625 и mod 40 однозначно определяются остатком mod 10^4 (как и цифра, стоящая в разряде тысяч).

• Пусть остаток рассматриваемого числа по модулю $10^4 = N$. Тогда $N = 625m + k = 40n + k$, $0 \leq k \leq 39$, $m, n \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow 625m = 40n \Leftrightarrow 125m = 8n$, $\Rightarrow m \vdots 8$.

а) $m < 0 \Rightarrow N < 0$, невозможно

б) $m = 0 \Rightarrow N \in [0; 39]$, $\Rightarrow$ цифра в разряде тысяч $= 0$. +

в) $m = 8 \Rightarrow N \in [5000; 5039]$, $\Rightarrow$ цифра в разряде тысяч $= 5$. +

г) $m \geqslant 16 \Rightarrow N \geqslant 10000$, невозможно.

Ответ: в разряде тысяч может стоять 0 или 5.

+

Задача (2)

Докажем невозможность $xy < 0$.

Если это возможно, то одно из чисел > 0, другое < 0. Без нарушения общности скажем, что $x > 0, y < 0$.

Тогда $y^4 - x^4 > y \Leftrightarrow x^4 - y^4 < |y| \Rightarrow |y| > x \Rightarrow x^4 - y^4 < 0$

$\Rightarrow$ $x<0$. Противоречие.

Отметим что $xy>0$ к примеру при $x=y=(-1)$ (В этом случае неравенства $\Leftrightarrow$ $0>-1$).

Ответ: xy может быть только положительным числом.

Задача 5)

Ответ: 51

а) Построим контрпример для $k\le 50$: посемим рыцарей на главной диагонали (в домах с номерами вида $(k;k)$). В дом $(1;99)$ посемим лжеца, в дом $(99;1)$ - знатка, остальные дома заполним в шахматном порядке (основываясь на угловых клетках не диагонали). Вот пример такого заполнения для города 7×7:

Л	Р	Л	Р	Л	Р	Р
Р	Л	Р	Л	Р	Р	Л
Л	Р	Л	Р	Р	Л	Р
Р	Л	Р	Р	Л	Р	Л
Л	Р	Р	Л	Р	Л	Р
Р	Р	Л	Р	Л	Р	Л
Р	Л	Р	Л	Р	Л	З

Возникает очевидная симметрия относ. главной диагонали (симметричные лжецу дом занимает рыцарь), поэтому, без учета домов главной диагонали на каждой улице живет поровну лжецов и рыцарей, а $\Rightarrow$, с учетом главной диагонали на каждой улице ровно по 50 рыцарей.

Пусть при ответе на вопрос каждый лжец сообщает расстояние (цветочное конечно) от своего дома до дома (1, 99). Докажем, что ни один из лжецов не сказал правду, т.е что расстояния от дома лжеца до (1, 99) и (99, 1) не равны:

Пусть лжец живет в доме (a, b). Тогда $S_1 = |1-a| + |99-b| = a-b+98$, $S_2 = |99-a| + |1-b| = b-a+98 \Rightarrow$ если $S_1 = S_2$, то $a = b$, т.е. лжец живет на главной диагонали, что неверно. $\Rightarrow S_1 \neq S_2$.

Отразим теперь наш пример относительно главной диагонали (т.е. Знайка окажется в доме (1,99), лжец - в доме (99,1), главную диагональ всё так же занимают рыцари). ~~По тем же соображениям, что и ранее,~~ Пусть теперь все лжецы указывают своё цветочное расстояние до дома (99,1). По тем же соображениям, что и ранее, все лжецы лгут, на каждой улице по 50 рыцарей. Более того, в обоих примерах (отраженном и начальном) жители одних домов дают одни ответы: если в одном примере в доме (a, b) жил рыцарь, то он указывал расстояние до того дома, где живет Знайка, то в другом примере в доме (a, b) живет лжец, который указывает расстояние до того же дома, ведь Знайка там больше не живет (для жителей главной диагонали, как показано ранее, расстояние до домов (99,1) и (1,99) не меняется).

Таким образом, для спрашивающего эти примеры идентичны, а ⇒ определить, в каком доме – (1,99) или (99,1) – живет Знайка, невозможно. ∎

б) Покажем, что при $k = 51$ можно гарантированно найти Знайку.

Скажем, что коротышка A голосует за коротышку B, если

1. Цветочное расстояние от дома A до дома B соотв. ответу A.
2. A и B живут на одной улице
3. Ответ B – 0.

Тогда отметим, что за Знайку проголосовало не менее 100 человек (ибо на его улицах не меньше 100 рыцарей, не включая его самого), а за любого лжеца – не более 99 человек: ≤ 96 лжецов (ибо их не более этого суммарно на двух любых улицах) и не более двух рыцарей (Чтобы проголосовать за лжеца рыцарь должен находится на перекрестке улиц лжеца и Знайки, таких перекрестков, очевидно, не более двух. Ит, если лжец и Знайка находятся на одной улице, рыцарь должен находится строго

НЕТ. Рыцарь НЕ обязан жить на одной улице со Знайкой, чтобы проголосовать за лжеца.

между ними, таких мест, очевидно не более одного).

Так как за других рыцарей голосовать невозможно (из-за пункта 3), Знайка наберёт наибольшее число голосов, а => может быть строго определён $\blacksquare$.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

Задача 6) +

Остатков по модулю 3 всего 3, угловых клеток таблицы - 4, а $\Rightarrow$, по принципу Дирихле, $\exists$ две угловые клетки, в которых стоят числа, пусть a и b, $a<b$, такие, что $a \equiv b \pmod 3$.

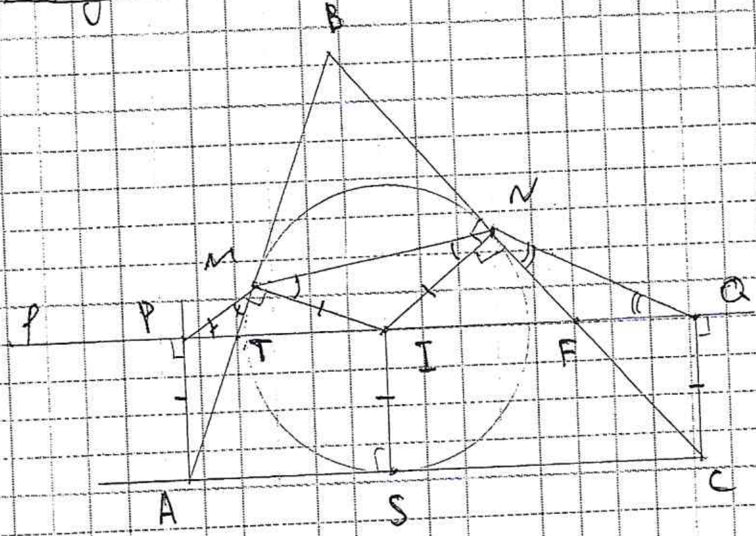
Без нарушения общности, пусть a стоит в клетке $(1;1)$ (левый верхний угол таблицы). Поставим в $(1;1)$ фишку, и станем двигать её, переходя из клетки, в которой стоит x в соседнюю, в которой стоит $x+3$. Так как $b = a+3n$, действуя таким образом когда-нибудь мы придем на клетку, на которой стоит b. Пусть к этому времени мы сдвинули фишку влево t_1 раз, вправо - t_2, вниз - k_1, вверх - k_2. Тогда в конце концов мы окажемся на клетке $(1+t_2-t_1; 1+k_1-k_2)$. Т.к. b стоит в одной из клеток с коор. $(1;9)$, $(9;1)$, $(9;9)$, то $t_2-t_1 \vdots 2$ и $k_1-k_2 \vdots 2$, $\Rightarrow t_1+t_2+k_1+k_2 \vdots 2$, т.е. всего было совершено четное число ходов. И т.к, очевидно, каждый ход меняет четность числа, на котором стоит фишка, это означает, что $a \equiv b \pmod 2$. $\Rightarrow \begin{cases} a-b \vdots 2 \\ a-b \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a-b \vdots 6$.

Ответ: Да, обязательно.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 5 | М1-11-07 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 7) +



• $T = \ell \cap AB$, $F = \ell \cap BC$

$S \in AC$, $IS \perp AC$

• Тогда $IM = IN = IS = r$,

$PA = QC = IS = r$,

т.к. $PA \parallel IS \parallel QC$, $\ell \parallel AC$

• $MI = IN = r$, $\Rightarrow \triangle MIN$ - равнобедренный, $\Rightarrow \angle MNI = \angle NMI$

• 1) $PA = MI = r$ 2) $\angle PTA = \angle MTI$, как верт. 3) $\angle TPA = \angle TMI = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle TPA = \triangle TMI \Rightarrow TP = TM \Rightarrow \triangle PTM$ - равнобедр.,

$\Rightarrow \angle TPM = \angle PMT$.

• 1) $IN = QC = r$ 2) $\angle NFI = \angle QFC$, как верт. 3) $\angle INF = \angle FQC = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle FNI = \angle FQC \Rightarrow NF = QF \Rightarrow \triangle NFQ$ - равнобедр.,

$\Rightarrow \angle FNQ = \angle NQF$

• $\angle IMT = \angle INF = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle PMN + \angle NQP = \angle PMT + \angle TMI + \angle IMN + \angle NQF =$

$= \angle MPT + \angle INF + \angle INM + \angle FNQ = \angle MNQ + \angle MPT$,

$\Rightarrow PMNQ$ - вписанный. ■

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 5

M11-11-07
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 8) +

Возьмем некое хорошее слово. Рассмотрим несколько вариантов: 1) В слове нет повторяющихся букв. $\Rightarrow$ его длинна $\leq n$.

Если же в слове есть повторяющиеся буквы, то выделим в нём несколько групп: группа 1 - с первой буквы до первой буквы, встретившейся дважды. Группа 2 - с последней буквы до первой справа буквы, встречавшейся дважды. Пример:

abcabc
группа 1 группа 2.

2) Группы ~~не~~ накладываются. Тогда так как в каждой группе не более одной пары $\Rightarrow \leq n+1$ букв, $\Rightarrow$ длинна слова $\leq 2n+1$.

Для рассмотрения дальнейших вариантов назовём букву, встречающуюся дважды в группе 1 - a, дважды в группе 2 - b.

3) Группы не накладываются, $a \neq b$. Тогда если стереть все буквы между группами, а также - все буквы кроме aa из первой группы и все, кроме bb из второй, получим aabb, т.е. наше слово - не хорошее. Противоречие.

4) группы не накладываются, $a=b$. Назовём буквы между группами 1 и 2 группой 3. Слово выглядит так:

$\underbrace{\dots a}_{\text{группа 1}}\underbrace{\dots}_{\text{группа 3}}\underbrace{a\dots}_{\text{группа 2}}$

Отметим, что из оставшихся $n-1$ букв, любая буква, кроме a, состоящая в группе 3, не может появиться в слове дважды, иначе она образует запрещенную последовательность с парой aa из группы 1 или группы 2. Пусть таких букв t. Любая буква из ост. $n-1-t$ встречается в каждой из групп 1 и 2 не более одного раза (ибо так они были сформированы), $\Rightarrow$ букв $\neq a$, в слове всего $\leq t+2(n-1-t)=2n-2-t$.

В группах 1 и 2 суммарно 4 буквы a, в группе 3 a может появляться не чаще, чем на каждой второй позиции, но не может появляться по краям (ибо соседние буквы различны), т.е. встречается не более $t-1$ раз.

$\Rightarrow$ всего длина слова $\leq 2n-2-t+t+3=2n+1$.

• По следующему принципу слово длины $2n+1$ составимо $\forall n$:

$1,2,1,3,1,4,\dots,1,n,1,2,1$ ← число k заменяет k-тую букву алфавита.

Единственная пара помимо $1,1$ в этом слове – $2,2$, а единств. четверка с этой парой – $1,2,2,1$, т.е. не запрещена.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 5 | M1-11-07
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Ответ: $2n+1$

Задача 9)

Ответ: 999~~89~~000. Пример: $P(x) = x^{(10^5)}$

Тогда $R(x) = 1000 \cdot x^{(10^5-1)\cdot 1000} + \ldots$

можно меньше!

НА

Задача 10) – Очевидно, что с каждой минутой числа на доске увеличиваются, при этом инкременты уменьшаются в квадратичной прогрессии, т.е. каждое число из x, y, z имеет предел. Тогда ясно, что ∃ ~~бесконечно~~ сколь угодно малая область вокруг предела (его не включающая) такая, что в ней нет целых чисел, и, т.к. наше число начиная с некого времени будет лежать строго внутри этой области, дальше числам оно равняться не сможет. – речь идёт про любое число из x, y, z. ∎

?