1	2	3	4	5	Σ
5	7	7	0	0	19

① + Пусть данное число равно N, а остаток от деления на 40 и 625 — t. Тогда $(N-t)\vdots 40$ и $(N-t)\vdots 625$ и также сразу заметим, что $0\leq t<40$. Получаем из кратности то, что $(N-t)\vdots 5000$. Заметим, что числа, кратные 5000 имеют на конце три нуля, а в разряде тысяч может стоять либо 5, либо 0. Таким образом, последние четыре цифры числа $(N-t)$ равны 5000 или 0000. Также заметим, что ни при каком допустимом значении t цифра в разряде тысяч числа N не отличается от цифры в том же разряде числа $(N-t)$, а значит, что и в числе N цифра в разряде тысяч равна 5 или 0.

Ответ: 5 или 0

+. ② Заметим, что при $x=-1$ и $y=-1$, мы имеем верные неравенства $0>-1$ и $0>-1$, значит данные значения удовлетворяют условию, а их произведение имеет знак плюс. Докажем, что произведение xy знак минус иметь не может.

Возьмем числа a и b такие, что $a\geq b>0$. Тогда пара чисел $(x;y)$ может принимать следующие значения $(a;-b)$, $(-a;b)$, $(b;-a)$, $(-b;a)$. (Рассматриваем только случаи с отриц. произведением.) $(a,-a)$

Также заметим, что данная система неравенств симметрична относ. x и y, а тогда рассмотрим только два случая: $(-a; b)$ и $(a; -b)$

При $x=-a$, $y=b$ получаем:

$$\begin{cases} a^4 - b^4 > -a & (1) \\ b^4 - a^4 > b & (2) \end{cases}$$

Т.к. $a>b>0$, то $b^4<a^4$, т.е. $b^4-a^4<0$ и из (2) получаем, что $b<0$, что противоречит предположению, то есть такой случай невозможен.

При $x=a$, $y=-b$ получаем:

$$\begin{cases} a^4 - b^4 > a & (1) \\ b^4 - a^4 > -b & (2) \end{cases}$$

Сложим (1) и (2) и получим, что $a-b<0$, то есть $a<b$, что опять противоречит предположению.

Это рассуждение не проходит, если $a=b$. Случай $(a, -a)$ нужно рассмотреть отдельно.

А т.к. все случаи, при которых произведение xy меньше нуля невозможны, то xy может быть только больше нуля, то есть иметь знак плюс.

Ответ: только знак плюс

③ + Обозначим за ширину графика расстояние между точками пересечения с осью Ox. В данной задаче, принимая во внимание условие того, что графики касаются прямой $y=-1$ мы можем утверждать, что любые два различных графика с одинаковой шириной имеют ровно одну общую точку, а графики с различной шириной имеют ровно 2 общие точки (за исключением тех, которые касаются прямой $y=-1$ в одной точке, такие имеют ровно одну общую точку). Также заметим, что графиков с шириной 100 не больше одного (он пересекает Ox в точках 0 и 100).

Мы имеем 200 графиков, среди которых не более 100 с различной шириной. Имея 19900 пар графиков, нам необходимо иметь ровно 101 пару графиков с ровно 1 общей точкой и все остальные с 2 общими точками, чтобы получить 39699.

Рассмотрим случай, когда мы имеем ровно 1 график шириной 100, ровно 3 графика шириной 1 и оставшиеся 196 графиков имеют ширину от 2 до 99 и каждая ширина ~~раз~~ встречается ровно два раза.

ВЕДУЩИЙ ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ? ВМЕСТО 1 МОЖНО ОСТАВИТЬ ЛЮБОЕ ЧИСЛО

Таким образом получаем 98 пар равной ширины (от 2 до 99), и тройку графиков шириной 1, в которых 3 пары графиков с одной шириной.

Получаем 101 пару ~~равных~~ графиков, имеющих равную ширину. Также заметим, что данное разбиение графиков на группы, образует наим. количество пар. Но на прямой $y=-1$ существует не более 199 точек, в которых графики из данной задачи могут касаться данной прямой. Тогда найдется хотя бы одна пара различных графиков, касающихся прямой $y=-1$ в одной точке (графики с равной шириной не могут касаться прямой $y=-1$ в одной точке, иначе они будут совпадать) и в таком случае появляется 102-я пара графиков, имеющая ровно 1 общую точку и максимальное достижимое число, которое мог получить Олег – это 39698.

Ответ: Не, Не мог.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 6 | М1-11-13
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

6

1) Разбим все числа на три группы по остаткам при делении на 3. Первая группа - это числа от 1 до 79 с шагом 3, вторая - от 2 до 80 и третья - от 3 до 81 соответственно. Заметим, что числа каждой группы образуют последовательную непрерывную линию на клетках таблицы. Другими словами, шагая последовательно по числам одной группы (например, 1, 4, 7, 10, ..., 73, 76, 79), мы всегда будем ходить на соседнюю клетку.

В таблице 4 угловые клетки, а значит обязательно найдется пара таких клеток, принадлежащая одной группе чисел, то есть числа в них будут давать одинаковый остаток при делении на 3, а значит разность этих чисел кратна 3.

Докажем кратность двум. Для этого раскрасим клетки таблицы в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что при движении последовательно по числам одной группы, мы всегда меняем цвет клетки, а т.к. числа в группе идут с шагом 3, то и меняется четность чисел в последовательности, то есть мы получаем, что в ~~таких~~ клетках одного цвета стоят числа одной чётности.

Также заметим, что при шахматной раскраске в таблице с нечетными сторонами угловые клетки имеют одинаковый цвет, а значит, по выше доказанному, в них стоят числа одной четности, то есть их разность делится на 2.

Доказав кратность 3 и 2, можно говорить о кратности 6.

Ответ: да, верно.

(8) Докажем, что существует хорошее слово длиной $2n+1$. Для иллюстрации возьмем $n=6$, тогда хорошим словом будет являться слово abcdefabcdefa. Другими словами, если мы два раза подряд перепишем весь алфавит, и в конце поставим первую букву алфавита, слово будет являться хорошим. Докажем это. Взяв любые две одинаковые буквы данного слова мы можем заметить, что между ними будет находится весь оставшийся алфавит, а значит, удалив все эти буквы, в слове останутся только буквы в единственном экземпляре, кроме взятых букв, значит мы не получим последовательности вида aabb, так как нужны две различные повторяющиеся букву.

Пример.

Докажем, что хорошего слова длиной $2n+2$ и больше не существует. Очевидно, что если не существует хор. слова длиной $2n+2$, то и большей длины так же не существует. Т.к. одинаковые буквы не могут стоять рядом, кол-во одной буквы в слове не может превышать $n+1$ штук. В таком случае можно говорить о том, что ~~обязательно~~ иногда Рассмотрим случай, когда найдутся две различные буквы, кол-во которых в слове не меньше трех. Обозначим эти буквы как A и B. Возьмем любую такую букву A, что с обеих сторон от неё будет ещё хотя бы ~~одна~~ по одной букве A. Так как букв B в слове не меньше трех, то обязательно найдутся такие две буквы B, которые будут стоять по одну сторону от выбранной буквы A. В таком случае мы можем взять данные две буквы B, выбранную букву A и ещё одну букву A со стороны, противоположной двум буквам B. Таким образом мы получим последовательность AABB или BBAA. ~~А значит, любое слово длиной 2n+2 и более хорошим являться не может.~~

Это был первый случай. Если же кроме одной буквы (обозначим опять как A) все остальные встречаются не более 2 раз, то буква A встречается не менее 4 раз.

Док-во того, что только 1 буква ≥ 3 раз

Пусть мы имеем $k \geq 4$ букв A в слове, тогда мы можем разбить слово на $k+1$ частей, границами которых будут буквы A.

$$\ldots\overset{1}{}\ldots A_1 \ldots \overset{2}{} \ldots A_2 \ldots A_{k-1} \ldots \overset{k}{} \ldots A_k \ldots \overset{k+1}{}\ldots$$

В частях 1 и $k+1$ букв быть не может, а в остальных должна быть хотябы одна буква, т.к. рядом буквы A стоять не могут. Также пронумеруем буквы A слева направо от 1 до k. Получаем, что если справа от буквы A_2 кроме A найдутся две повторяющиеся буквы B мы получим последовательность $A_1 A_2 BB$, аналогично слева от A_{k-1} также буквы не могут повторятся. Таким образом, любая буква, находящаяся в областях слова от 3 до $k-2$ в слове встречается не более одного раза. Таких частей в слове $k-3$, в каждой не меньше 1 буквы и каждая такая буква единственна в слове. Остальные $(n-(k-3)-1)$ букв могут встречатся не более двух раз. Посчитаем максимальную возможную длину такого слова

Кол-во букв, которые встр. 2 раза: $n-(k-3)-1$

Кол-во букв A : k

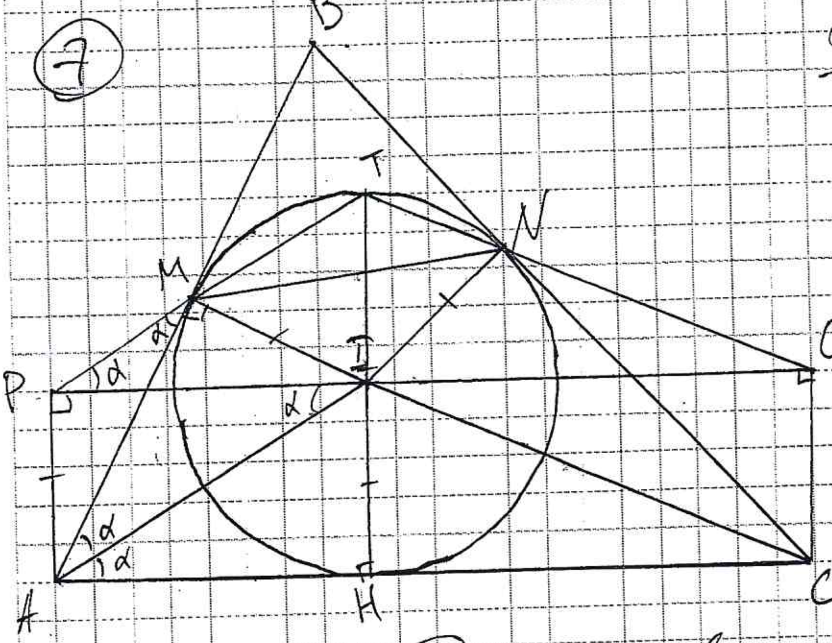
Кол-во букв, которые встр. 1 раз: $k-3$

Общее кол-во букв в слове: $(n-(k-3)-1)\cdot 2+(k-3)+k =$
$= 2n-2k+6-2+k+k-3 = 2n+1$

А значит ~~его~~ хорошего слова длиной $2n+2$ не существует.

Ответ: $2n+1$

(7)



Дано: I - центр. вп. окр. ω в $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ - остроуг.
$M = AB \cap \omega$ $N = BC \cap \omega$
$\ell \parallel AC$, $I \in \ell$,
$P \in \ell$, $AP \perp \ell$,
$Q \in \ell$, $CQ \perp \ell$

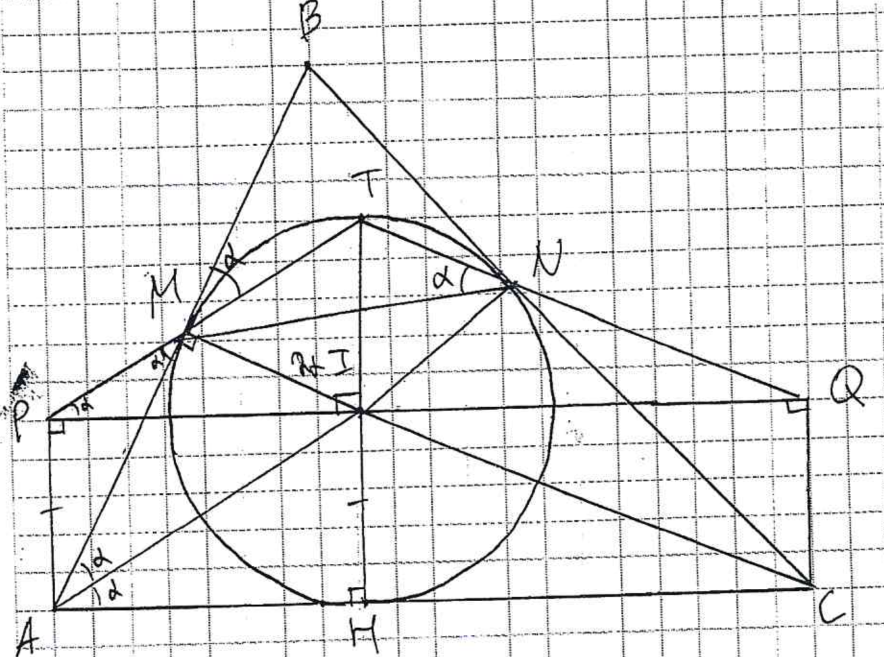
Доказать: $\exists \omega_1$: $\{M; N; P; Q\} \subset \omega_1$

Доказательство:

1. Проведем бисс. AI и обозначим угол, на который бисс. делит $\angle A$ как α
2. $\angle API = 90^\circ$ из условия перпенд. $AP \perp \ell$ и $\angle AMI = 90^\circ$ т.к. радиус перпенд. касательной в точке касания. Из этого следует, что точки A, P, M и I лежат на одной окружности. ω'
Из этого следует, что $\angle MPI = \angle MAI = \alpha$
3. $\angle PIA = \angle IAH = \alpha$ как внутр. накрестлежащие при $\ell \parallel AC$.
Также из окружности ω' $\angle PMA = \angle PIA = \alpha$
4. Проведем диаметр HT в ω, $IT = IH$ как радиусы ω.
Тогда в $\triangle PTI$ $\angle TPI = \alpha$, т.к. $\triangle PTI = \triangle AIH$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 6 ИЗ 6	М1-11-13 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)



А так как $\angle TPI = \alpha$ и $\angle MPI = \alpha$, то $M \in PT$, тогда $\angle BMT = \alpha$. ? В окр. ω $\angle BMT$ явл. углом между касат. и хордой MT, тогда $\angle MIT = 2 \cdot \angle BMT = 2\alpha$. А тогда $\angle MTN = \frac{1}{2}\angle MIT = \alpha$

$\angle MNT$

5. Тот факт, что N лежит на прямой TQ доказывается аналогично тому, как доказывается, что M лежит на PT (через равные треуг. $\triangle HIC$ и $\triangle ITQ$ и равные углы $\angle TQI$, $\angle NQI$ и $\angle ICH$)
Тогда, если $\angle TNQ = 180^\circ$, то $\angle MNQ = 180^\circ - \angle TNM = 180^\circ - \alpha$

6. Рассмотрим четырехугольник $PMNQ$ и противополож. углы $\angle MPQ = \alpha$, $\angle MNQ = 180^\circ - \alpha$. А если у чет-ка ~~против~~ сумма противоположных углов равна 180°, то он является вписанным. Доказано!