Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 7 | М1-11-18 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	5	0	0	19

№ 11.1

1) Пусть n - исходное число, $n \geq 10^6$. Пусть при делении на 40 число даёт остаток r, и такой же остаток при делении на 625. Тогда:

$n = 40\alpha + r \quad n = 625\beta + r \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 0; \ \beta \in \mathbb{Z}, \beta \geq 0$

Давайте представим число n в виде: $n = 10^4 \cdot k + \overline{b_1 b_2 b_3 b_4}$

$\overline{b_1 b_2 b_3 b_4}$ — фактически это число образует последние 4 цифры числа n. Тогда:

$n \underset{40}{\equiv} 10^4 \cdot k + \overline{b_1 b_2 b_3 b_4} \underset{40}{\equiv} \overline{b_1 b_2 b_3 b_4} \underset{40}{\equiv} 10^3 \cdot b_1 + \overline{b_2 b_3 b_4} \underset{40}{\equiv} \overline{b_2 b_3 b_4} = a$

$n \underset{625}{\equiv} 10^4 \cdot k + \overline{b_1 b_2 b_3 b_4} \underset{625}{\equiv} \overline{b_1 b_2 b_3 b_4} \underset{625}{\equiv} 10^3 \cdot b_1 + \overline{b_2 b_3 b_4} = 10^3 b_1 + a$

Я обозначил $\overline{b_2 b_3 b_4} = a$. Заметим, что $a \leq 999$.

Я знаю, что $a \underset{40}{\equiv} r$, $10^3 b_1 + a \underset{625}{\equiv} r$

Пусть $a = 40m_1 + r \quad 10^3 b_1 + a = 625 m_2 + r \quad (m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{Z})$

Тогда: $\begin{cases} a = 40m_1 + r \\ 10^3 b_1 + a = 625 m_2 + r \end{cases} \Rightarrow 10^3 b_1 = 625 m_2 - 40 m_1$
$5^3 \cdot 2^3 b_1 = 5^4 m_2 - 5^1 \cdot 2^3 m_1$

Так как $(10^3 b_1) \vdots 5^3$, $(5^4 m_2) \vdots 5^3$, то и $(40 m_1) \vdots 5^3 \Rightarrow \boxed{m_1 \vdots 25}$

Так как $(10^3 b_1) \vdots 2^3$, $(40 m_1) \vdots 2^3$, то и $(5^4 m_2) \vdots 2^3 \Rightarrow \boxed{m_2 \vdots 8}$

Пусть $m_1 = 25 q_1 \quad m_2 = 8 q_2$, $q_1 \geq 0 \ q_1 \in \mathbb{Z}$; $q_2 \geq 0 \ q_2 \in \mathbb{Z}$

Тогда: $a = 40 m_1 + r = 25 \cdot 40 q_1 + r = 10^3 q_1 + r$. Однако $a \leq 999 \Rightarrow \boxed{q_1 = 0}$

Значит $\boxed{a = r}$

$\Downarrow$

$a + 10^3 b_1 = 625 m_2 + r$

$r + 10^3 b_1 = 5^4 \cdot 2^3 q_2 + r$

$5^3 \cdot 2^3 b_1 = 5^4 \cdot 2^3 q_2$

$\Downarrow$

$b_1 = 5 q_2$, а так как b_1 — цифра, то $\underbrace{b_1 \vdots 5}$ $b_1 = 0$ или $b_1 = 5$.

2) Теперь приведу пример для $b_1 = 0$: $n = 10000000$

$b_1 = 5$: $n = 10005000$

Легко увидеть, что в обоих случаях $n \underset{40}{\equiv} 0$ $n \underset{625}{\equiv} 0$, то есть они подходят. $\boxed{\text{Ответ: 5 или 0.}}$

№11.2

$\begin{cases} x^4-y^4>x \\ y^4-x^4>y \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{0>x+y}$ $\Leftrightarrow$ возможны 2 варианта

1) $x<0$ и $y<0$. Тогда $xy>0$, то есть знак „+".

Это выполнимо. Приведу пример $x=-1$ $y=-1$

$\begin{cases} 1^4-1^4>-1 \\ 1^4-1^4>-1 \end{cases}$ — это истина!

2) $x<0$ и $y>0$. Ясно, что есть симметричный случай $x>0$ и $y<0$, но его нет смысла рассматривать, ибо он симметричный.

Введём $a=-x$, тогда $a>0$.

Ясно, что раз $x+y<0$, то есть $y-a<0 \Rightarrow$ $a>y$

Рассмотрим: $y^4-x^4>y \Leftrightarrow y^4-a^4-y>0$

$(y^2+a^2)(y^2-a^2)-y>0$

$\underbrace{(y^2+a^2)(y+a)(y-a)}_{<0}\underbrace{-y}_{<0}>0$

Получаем противоречие. Значит такой случай невозможен.

3) $x>0$ и $y>0$ не возможен, т.к. $x+y<0$.

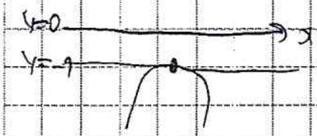
Ответ: xy может иметь только один знак, знак „+".

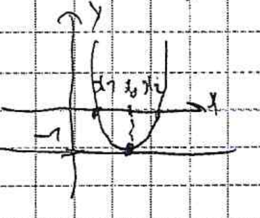
Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 7	М1-11-18
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

(Р-11.3)

1) Рассмотрим $f(x) = ax^2+bx+c$. Пусть x_1 и x_2 – его корни, т.е. $f(x_1)=f(x_2)=0$.
Заметим, что касание прямой $y=-1$ означает, что вершина параболы лежит на прямой $y=-1$. Также ясно, что для всех $f(x)$ будет верно, что $a>0$, т.к. иначе парабола не пересечёт ось OX:





Ясно, что вершина параболы имеет $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Тогда
$f(x_0)=-1$ $\quad a\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=-1$

$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -1 \Leftrightarrow c = \frac{b^2}{4a} - 1$

2) Найдём сколько общих точек могут иметь 2 параболы в данной задаче. Пусть $f(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ $\quad g(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2)=0$

$(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+\left(\frac{b_1^2}{4a_1}-1-\frac{b_2^2}{4a_2}+1\right)=0$

$(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+\left(\frac{b_1^2}{4a_1}-\frac{b_2^2}{4a_2}\right)=0$

а) Пусть $a_1=a_2$. Ясно, что $b_1 \neq b_2$, т.к. иначе ~~одна или вершина совпадут, но тогда бы~~ (вершины) параболы совпадут, тогда $x = \frac{c_1-c_2}{b_2-b_1}$ – ровно 1 решение

б) $a_1 \neq a_2$. Рассмотрим $D = (b_1-b_2)^2 - 4(a_1-a_2)\left(\frac{b_1^2}{4a_1}-\frac{b_2^2}{4a_2}\right) = b_1^2+b_2^2-2b_1b_2 - b_1^2 + \frac{a_1}{a_2}b_2^2 - b_2^2 + \frac{a_2}{a_1}b_1^2 = \frac{a_1}{a_2}b_2^2 + \frac{a_2}{a_1}b_1^2 - 2b_1b_2$. Пусть $\frac{a_1}{a_2}=k$.

$D = kb_2^2 + \frac{1}{k}b_1^2 - 2b_1b_2$. Ясно, что из неравенства Коши $\frac{kb_2^2+\frac{1}{k}b_1^2}{2} \geq \sqrt{kb_2^2\frac{1}{k}b_1^2} = b_1b_2$

значит $D \geq 0$, причём $\boxed{D=0}$ при условии $k=1$.
Но т.к. $\boxed{a_1 \neq a_2}$, то в данном случае $D>0$, то есть при $a_1 \neq a_2$ у парабол ровно 2 общие точки

нет

Вывод: при $a_1=a_2$ – ровно 1 пересечение у парабол
при $a_1 \neq a_2$ – ровно 2 общие точки у парабол

А если у парабол общая вершина

3) Ясно, что среди 19900 пересечений парабол ровно n пересекаются в одной точке, тогда $n + 2(19900-n) = 39699$

$n = 101$

То есть ровно в 101 случае параболы имеют ровно 1 общую точку.

4) Заметим, что расстояние между 2 корнями $f(x)$ равно:

$$\delta = \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{\sqrt{b^2-4a\cdot\left(\frac{b^2}{4a}-1\right)}}{a} = \frac{2\sqrt{a}}{a} = \frac{2}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a = \frac{4}{\delta^2}$$

Ясно, что это расстояние может колебаться от 1 до 100, причём $\delta \in N$.

Значит нам 200 графиков может быть не более 100 разных коэффициента a.

Тогда рассмотрим эти 100 коэффициентов. Пусть n_1 график имеет коэф. a_1, n_2 графиков коэффициент a_2 и т.д.

Тогда $\sum_{i=1}^{100} n_i = 200$, $n_i \in Z$, $n_i \geq 0$.

Ясно, что число графиков, которые пересекаются ровно в одной точке, равно:

$101 = \sum_{i=1}^{100}\left(\frac{n_i(n_i-1)}{2}\right)$, ну т.е. для данного n_i равно $\frac{n_i(n_i-1)}{2}$ пар парабол с одинаковым a_i

Преобразуем:

$101\cdot 2 = \sum_{i=1}^{100}(n_i^2) - \sum_{i=1}^{100} n_i$

$202 = \sum_{i=1}^{100}(n_i)^2 - 200 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{100}(n_i)^2 = 402}$

Пусть $n_i = 2+\Delta n_i$, где $\Delta n_i \in Z$, тогда:

$402 = \sum_{i=1}^{100}(n_i)^2 = \sum_{i=1}^{100}(2+\Delta n_i)^2 = 400 + \sum_{i=1}^{100}(\Delta n_i)^2 + 4\cdot\sum_{i=1}^{100}(\Delta n_i) = 400 + \sum_{i=1}^{100}(\Delta n_i)^2$, т.к.

$\sum_{i=1}^{100}(n_i) = \sum_{i=1}^{100}(2+\Delta n_i) = 200 + \sum_{i=1}^{100}\Delta n_i = 200 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100}(\Delta n_i) = 0$

Если какое-то $|\Delta n_i| > 1$, то $\sum_{i=1}^{100}(\Delta n_i)^2 > 2$, а должно быть равно 2.

Значит заведомо $\Delta n_i = 0; 1; -1$. Ясно, что подходит только 1 вариант, когда одно $\Delta n_k = 1$ и одно $\Delta n_l = -1$, остальные $\Delta n = 0$.

Значит для n имеем 98 двоек, 1 тройку и 1 единицу.

$n_1 = 1$ $n_2 = 3$ $n_3 = n_4 = \ldots = n_{100} = 2$

~~Значит получаем, что если ровно 1 график имеет $a = a_1$, 3 графика $a = a_2$, для оставшихся 98 графи~~

1 график $a = a_1$ $\delta_1 = 100$ $f(x) = (x-0)(x-100)\cdot a_1$

3 графика $a = a_2$ $\delta_2 = 1$ $f(x) = (x-0)(x-1)a_2$, $g(x) = (x-1)(x-2)a_2$, $h(x) = (x-2)(x-3)a_2$

2 графика $a = a_3$ $\delta_3 = 2$ $f(x) = (x-0)(x-2)a_3$, $g(x) = (x-1)(x-3)a_3$

$\delta_k = k+1$ $f(x) = (x-0)(x-(k-1))a_k$, $g(x) = (x-1)\cdot(x-k)a_k$

2 графика $a = a_{100}$ $\delta_{100} = 99$ $f(x) = (x-0)(x-99)a_{100}$, $g(x) = (x-1)(x-100)a_{100}$

$\left(a_i = \frac{4}{\delta_i^2}\right)$

Давайте докажем, что тот набор функций, который я написал удовлетворяет всем условиям.

~~Рассмотрим семейство функций, которые имеют один из корней $x=0$: второй тогда $x=d$~~

~~$f(x)=x(x-d)a=x(x-d)\cdot\frac{4}{d^2}$~~

~~Тогда графики должен касаться $y=-1$: $f(\frac{d}{2})=-\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{4}{d^2}=-1$ это очевидно~~

Рассмотрим семейство функций, которые имеют один из корней x_0, а другой x_0+d. Тогда:

$f(x)=a(x-x_0)(x-x_0-d)=\frac{4}{d^2}(x-x_0)(x-x_0-d)$. Проверим, касается ли $f(x)$ прямой $y=-1$:

$f(\frac{x_0+d+x_0}{2})=f(x_0+\frac{d}{2})=\frac{4}{d^2}(x_0+\frac{d}{2}-x_0)(x_0+\frac{d}{2}-x_0-d)=-1$

То есть эти 200 парабол выполняют все условия, касаются $y=-1$ и имеют 2 решения, которые есть целые числа от до 100, также все функции различны.

Ранее комбинаторно доказали, что такой набор имеет 101 пару парабол с ровно 1 пересечением:

$$\sum_{i=1}^{100}\frac{n_i(n_i-1)}{2}=\frac{1\cdot(1-1)}{2}+\frac{3\cdot(3-1)}{2}+\frac{2\cdot(2-1)}{2}\cdot 98=0+3+98=101.$$

Вывод: этот пример всем требованиям удовлетворяет, значит ответ на задачу „да, мог".

ЛИСТ 6 ИЗ 7	М1-11-18 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

ПЗ 11.5

1) Заметим, что если бы все говорили правду, то было бы такое расположение: спросим у всех расстояние — получим табличку.

То есть в виде ромбика одинаковые числа.

3
3 2 3
3 2 1 2 3
3 2 1 0 1 2 3
3 2 1 2 3
3 2 3
3

Также заметим важный факт — знайка рыцарь, а значит в нашей расстановке поля 99×99 будет один из нулей — знайка.

2) Также существует условие, что если 0 — потенциальный знайка, то в столбцах и строках, отличных от ~~[illegible]~~ строки и столбца знайки, должно быть в каждой минимум k ~~[illegible]~~ клеток, которые соответствуют правде.
А в столбце или строке со знайкой минимум $k-1$ рыцарь $\Rightarrow$ минимум $k-1$ клетка соответствует правде.
Причём также, если 0 — знайка и какая-то клетка соответ. правде, то в этой клетке обязательно рыцарь. почему?

если же потенциальный 0 оказался ложным, то и во всех ~~все~~ клетках, которые соответствуют „ложной правде", живут лжецы. А если этот 0, ~~[illegible]~~ удалён от рыцаря на столько же насколько и знайка?

пример:

2
1 } либо все 4 лжецы, либо все 4 рыцаря
0 1

3) То есть мы не можем определить, где знайка, только в том случае, если будут 2 потенциальных нуля — знайки, т.е. выполнено условие про k рыцарей на улице.

Это что означает оценку сверху, $k > 49$. Если ровно ~~[illegible]~~ 50 лжецов и 49 рыцарей, то 49 лжецов подстраиваются под псевдознайку, а 49 рыцарей в ряду/столбце под настоящего знайку. Отличить не получится.

49 на него указ.
0
50 на него указывают
0
49 на него
0
50 на него

4) Если $k=50$, то ясно, что для строки возможен случай, что для 2 потенциальных знайки какой-то один дом будет одновременно рыцарем для двоих. пример:

50 0 0 ← 50

Вывод: $k \geq 50$.

а) ~~Если~~ Оценка сверху очевидна $k \leq 57$. Так как не более одного дома в данной строке могут оказаться одновременно рыцарями для двух потенциальных знаек. То есть, минимум 57 рыцарь, максимум 43 лжецов подстроятся под ложного знайку и ещё максимум 7 рыцарь скажет правду про ложного знайку. Итого не более 50, а должно быть минимум 57.

Если ~~в~~ Знайка и псевдознайка в одной строке, то ситуация аналогична. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ б) $k \leq 57$ из оценки сверху
$k \geq 49$ из оценки снизу
$k \geq 50$ из другой оценки снизу
$\Rightarrow$ ~~$k=50$~~ $k=57$

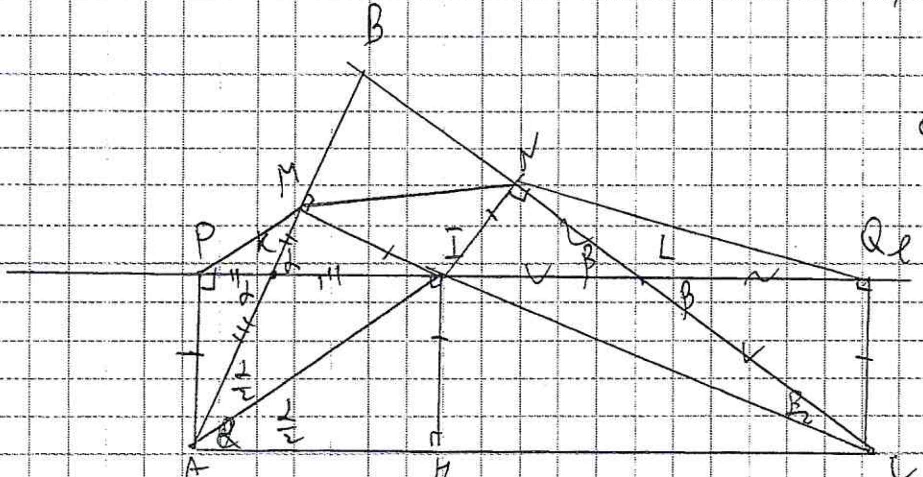
Этого не всегда хватит.

ЛИСТ 1 ИЗ 6 | М1-11-18
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 11.7

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

Пусть $K = AB \cap \ell$
$L = BC \cap \ell$
H – точка касания окружности на AC



1) $PA = MI = IN = CQ$, т.к. расстояние от точки I до AC – радиус окружности
~~$PA = QC$, т.к.~~

2) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BAC = \angle BKQ = \alpha$ (т.к. $\ell \parallel AC$); $\angle BLK = \angle B(A=\beta$ ($\ell \parallel AC$)
$\angle PKA = \alpha = \angle MKI$
$PA = MI$, $\angle PAK = \angle KMI = 90°$ $\Rightarrow \triangle APK = \triangle IMK \Rightarrow$ $PK = KM$, $AK = KI$

3) $\triangle PKM \sim \triangle AKI$ $\left(\frac{PK}{AK} = \frac{MK}{KI}, \angle PKM = \angle AKI\right) \Rightarrow \angle KAI = \angle KIA = \angle KMP$ ($\triangle AKI$ – равноб., $\triangle PKM$ – равноб.)

4) т.к. I – точка пересечения биссектрис, то $\angle KAI = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PMK = \frac{\alpha}{2} = \angle MPK$

5) Аналогично $\triangle INL = \triangle CQL$ ($IN = QC$, $\angle INL = \angle LQC = 90°$, $\angle ILN = \angle QLC (= \beta)$)
$\Rightarrow NL = LQ$, $IL = LC$

6) $\triangle ILC$ – равнобедр, $\triangle NLQ$ – равнобедр.
$\triangle NLQ \sim \triangle ILC$ $\left(\frac{NL}{IL} = \frac{LQ}{LC}, \angle ILC = \angle NLQ\right) \Rightarrow \angle LQN = \angle LIC = \angle LCI$

7) IC – бис. $\angle ACB \Rightarrow \angle ICL = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \angle QNL = \frac{\beta}{2} = \angle LQN$

8) из $\triangle KMI$: $\angle KIM = 90° - \angle MKI = 90° - \alpha$
из $\triangle NIL$: $\angle NIL = 90° - \angle NLI = 90° - \beta$
$\angle MIN = 180° - \angle KIM - \angle NIL = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta$
$\triangle MIN$ – равнобедр. $\Rightarrow \angle IMN = \angle MNI = \frac{180°}{2} - \frac{\angle MIN}{2} = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}$

9) $\angle PMN = \angle PMK + \angle KMI + \angle IMN = \frac{\alpha}{2} + 90° + 90° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{\beta}{2}$.
$\angle PMN + \angle PQN = \left(180° - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow$ сумма против. углов PMNQ $180° \Rightarrow$
$\Rightarrow P, M, N, Q$ – лежат на одной окружности,

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 6	М1-11-18 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 11.6

1) Рассмотрим число 1. Ясно, что число 4 должно быть его соседом. Число 7 — сосед числа 4 и т.д.
Получаем некую „дорожку": 1-4-7-10-...-79.

Это „дорожка" обладает замечательным свойством: её длина ровно 27, а каждое ~~число в этой дорожке~~ ~~на 3 больше~~ последующее число в этой дорожке на 3 больше предыдущего.

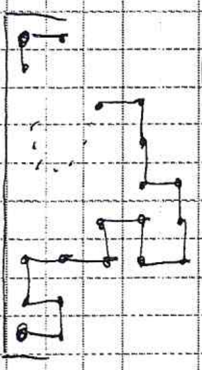
Рассмотрим ещё 2 дорожки: 2-5-8-11-...-80
и
3-6-9-...-81

Ясно, что все 3 эти „дорожки" полностью заполняют таблицу 9×9

То есть число от 1 до 81 обязательно принадлежит к одной из „дорожек".

2) ~~В~~ Угловых клеток ровно 4. А дорожек ровно 3. Тогда из принципа Дирихле 2 угловые клетки будут лежать на одной дорожке. Значит это уже заведомо означает, что разность между этими ~~и~~ числами делится на 3.

3) Рассмотрим 2 случая:
а) ~~и~~ две угловые клетки, лежащие на одной „дорожке" прилегают к одной из сторон таблицы:

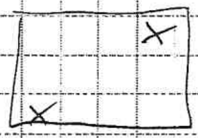


(Понятно, что число в углу не обязано быть первым элементом „дорожки", рисунок приводится в качестве примера.)

~~Тогда получаем~~ Повернём таблицу так, чтобы одно число было в нижнем левом углу, а второе в верхнем левом углу.
Тогда по вертикали, чтобы добраться до числа, нужно было $(n+8)$ раз сместиться вверх и n раз сместиться вниз. k раз влево и k раз вправо.
Тогда общее число смещений: $(n+8)+n+k+k=2(n+k+4)$.
То есть число смещений чётно.
Вдоль этой „дорожки" при каждом смещении число будет увеличиваться на 3 (если идём от меньшего числа к большему) или наоборот уменьшиться на 3. Значит что тогда ~~число~~ число в левой нижней угловой клетке на $2(n+k+4)\cdot 3=6(n+k+4)$ больше (меньше) числа в верхней левой угловой клетке. Тогда ясно, что их разность делится на 6.

ЛИСТ 3 ИЗ 6	М1-11-18
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

б) Две клетки находятся в противоположных углах. Тогда понятно, что ~~для прихода~~ можно повернуть таблицу так, чтобы одно число было в левой нижней клетке, а другое в правой верхней.



По аналогии с пунктом (2а), чтобы добрать от одного числа до другого нужно $(n+d)$ раз сместиться вправо, n раз сместиться влево, $(k+d)$ раз сместиться вверх и k раз сместиться вниз.

Тогда общее число ходов: $(n+d)+n+(k+d)+k=2(d+k+n)$. То есть мы снова сделаем чётное число ходов, значит левое нижнее число на $6(d+k+n)$ больше или меньше числа в верхней правой клетке. Тогда разность между ними делится на 6.

Ответ: Верно.

$\boxed{№11.2}$

Ответ: $2n+1$.

1) Пример для такого числа букв, который всему бы удовлетворял, имеется:

$$\underbrace{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}\, a_1$$

a_i — i-ая буква

Очевидно, что этот пример нам подходит.
Действительно, если для каких-то букв i и j это не выполн., то

$a_i\, a_i\, a_j\, a_j$ это означает, что после первой буквы a_i идёт хотя бы 2 буквы a_j. Для всех $i \neq 1$, $j \neq 1$, после a_i буквы идёт ровно одна или ноль a_j.

если $i=1$, то после второй a_1 должно идти 2 одинаковых буквы, но таких нет.

если $j=1$, то перед второй a_1 должно идти 2 одинаковых буквы, но таких нет.

2) Оценка.
Предположим, что есть последовательность больше чем из $(2n+1)$ буквы. Тогда букв не менее $2n+2$. Тогда из принципа ~~Дирихле~~ Дирихле будет хотя бы одна буква использоваться не менее 3 раз.

Пусть эта буква используется k раз, $k \geq 3$.

Не умоляя общности, скажем, что k раз используется буква A.

A ① A ② A ③ A ... A (k-2) A (k-1) A

~~Раз~~ пронумеруем пространства между i-ой и $(i+1)$-ой буквой A номером i, тогда будет $(k-1)$ пространство, $k-1 \geq 2$.

а) Заметим, что ~~каждое со (k-2)-ое пространство~~ если в каком-то из промежутка со 2-ого по $(k-2)$ пространства мы ставим букву, то мы нигде больше не сможем поставить ~~букву~~ эту букву ещё раз.
Действительно, тогда ведь после первой постановки этой буквы слева от неё и справа будет минимум по две буквы A:

AA B AA.

Если ставим B опять в этом промежутке, то ситуация такая:

AABBAA — очевидно, такое нельзя. (~~AA~~BBAA)

если слева или справа, то тоже нельзя:

BAA BAA   AABAAB
(~~BAA~~BAA)   (AAB~~AA~~B)

Также заметим, что раз между двумя соседними буквами A должна находиться минимум одна буква, то со 2-~~ого~~ое по $(k-2)$-ое пространство будет минимум $(k-3)$ буква.
А раз мы доказали, что если буква попадает в это пространство, то она больше не может быть использована. Следовательно $(k-3)$ буквы мы сможем использовать не более 1 раза.

б) Также заметим, что не может никакая буква, отличная от A, использоваться более 2 раз.
Докажем это. Пусть буква B используется хотя бы 3 раза.
Также буква A используется хотя бы 3 раза.
Не умоляя общности, пусть мы нашли этот пример, пусть буква A в ней первая (если первая B, то переобозначим буквы)
~~Возможно~~ Ясно, что после второй A не может идти 2 буквы B.
Также ясно, что перед ~~первой~~ второй A не может идти 2 буквы B. Но это означает, что мы не можем поставить больше 2 букв B.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 6 | М1-11-18
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

получаем противоречие

в) Теперь посмотрим, k раз использовали букву A. $(k-3)$ букву использовали не больше одного раза. ~~$(k-2)$~~ оставшиеся букви можем использовать не более 2 раз. Итого использовали не более:

$$k+(k-3)+(n-(k-2))\cdot 2 =$$
$$= 2k-3+2n-2k+4 = 2n+1$$

То есть мы не можем получить больше чем $2n+1$.

~~г) Пример. Покажем, что пусть $m = k$, $m = n$.~~

~~Заметим, что для многочлена вида $R(y) = P(y+1) - P(y)$ где первый коэффициент при пох степени m будет 1. $R(y)$ — имеет степень $(m-1)$.~~

~~Док-во: $P(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_m$~~

~~$P(y+1) = (y+1)^m + a_1 (y+1)^{m-1} + \dots + a_m$~~

~~$(y^m + C_m^1 y^{m-1} + C_m^2 y^{m-2} + \dots + 1) - y^m + a_1 (y^{m-1} + C_{m-1}^1 y^{m-2} + \dots + 1) - a_1 y^{m-1} + \dots$~~

~~Остальные степени ниже $m-1$. Их не будет рассматривать как видим при y^{m-1} будет ненулевое число:~~

~~$(C_m^1 + a_1 - a_1) = C_m^1 = m$, $m \neq 0$~~

~~г) Рассмотрим $P(x) = x^n + a_1 x^{n-k} + a_2 x^{n-2k} + \dots + a_n$~~

~~Сделаем замену $x^k = y$. Тогда:~~

~~$P(y) = y^{\frac{n}{k}} + a_1 y^{\frac{n}{k}-1} + \dots + a_n$, $\frac{n}{k} = m = \alpha$~~

~~Тогда $R(y) = P(x^k+1) - P(x)^k = \dots - P(y)^k$~~

~~$P(y) = y^\alpha + a_1 y^{\alpha-1} + \dots + a_n$~~

~~$R(x) = P(x^k+1) - P(x)^k = P(y+1) - (x^n + a_1 x^{n-k} + \dots + a_n) \dots P(y^{\frac{1}{k}})^k$~~

~~$= P(y+1) - y^\alpha + a_1 y^{\alpha-1} + \dots$~~

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 6 ИЗ 6

М1-11-18
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

(9) (к 11)

1) пусть $n = 10^5$ $k = 10^3$ $\frac{n}{k} = 100 = \alpha$

пусть $P(x) = x^n + a_1 x^{n-k} + a_2 x^{n-2k} + \ldots + a_{\frac{n}{k}}$

Тогда степени будут вида $nk - n$.

Рассмотрим: $P(x^k + 1) = (x^k + 1)^n + a_1 (x^k + 1)^{n-k} + \ldots + a_\alpha$

Степень при $nk - mk$: $C_n^m + a_1 C_{n-k}^{m-1} + \ldots + a_m C_{n-mk}^0$

Рассмотрим $P(x)^k = (x^n + a_1 x^{n-k} + \ldots + a_\alpha)^k$

Степень при $nk - mk$: $C_k^m \cdot a_m$

Условие, что при степени $nk - nk$ будет в $R(x)$ 0:

$$C_k^m \cdot a_m = C_n^m + a_1 C_{n-k}^{m-1} + \ldots + a_m C_{n-mk}^0$$

$$a_m \left(C_k^m - C_{n-mk}^0 \right) = C_n^m + a_1 C_{n-k}^{m-1} + \ldots$$

может не иметь решени

Если это записать для всех $m = 1 \ldots 100$, то мы получим систему из 99 уравнений с 99 неизвестными. Решив её мы найдём a_i. Тогда данный многочлен будет иметь степень 0.

2) почему для минимизации не нужно использовать коэфф не при степени $n - kn$, докажем это:

$(nk-1)$ можем получить только ~~единственно~~ в $P(x)^k$, в $P(x^k + 1)$ мы его не получим. Значит

$$C_k^1 \cdot a_1 = 0$$

Аналогично для $(nk-2) \ldots (nk-(k-1))$, и тогда (можем добиться нулевого коэффициента, иначе нет.

Аналогично можно показать для $nk-(k+1)$, $nk-(k+2) \ldots$

Значит $P(x)$ имеет вид как в пункте 0).

НА