Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 9

М1-11-20
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 7 | 0 | 0 | 21 |

**№11.1.**

$x$ – число, дающее одинаковые остатки на 40 и на 625

$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 40a + c \\ x = 625b + c \end{array}$, где $a, b, c \in \mathbb{N}$, причём $c < 40$ (остаток).

Домножим 1 ур-е на 125, 2 ур-е – на 8:

$$- \begin{array}{l} 125x = 5000a + 125c \\ 8x = 5000b + 8c \end{array}$$

$$117x = 5000(a-b) + 117c$$

$$117(x-c) = \underbrace{5000(a-b)}_{\vdots 5000}, \quad 5000 \text{ и } 117 \text{ взаимно просты}$$

$\Rightarrow (x-c) \vdots 5000 \Rightarrow x = 5000t + c$, где $t \in \mathbb{N}$ и $c < 40$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в разряде тысяч у числа $x$ могут стоять только цифры 0 или 5.

Примеры:

$$100\underline{\underline{5}}000 = 25125 \cdot 40 + 0 = 625 \cdot 1608 + 0$$

$$110\underline{\underline{0}}000 = 625 \cdot 1760 + 0 = 27500 \cdot 40 + 0$$

Ответ: 0 и 5.

**№11.2**

$x \neq 0;\ y \neq 0$

$$\begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ y^4 - x^4 > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)(x+y)(x-y) > x \\ (x^2+y^2)(x+y)(y-x) > y \end{cases}$$

Домножим ~~2 ур-е~~, обе части 2 нер-ва на $(-1)$, поменяв знак нер-ва:

$$(x^2+y^2)(x+y)(x-y) < -y$$

С учётом 1 нер-ва: $-y > x \Rightarrow x + y < 0$

Доп., что ~~$x>y$~~ $x > 0 > y$ (т.е. $x$ и $y$ разных знаков)

$\Rightarrow \underbrace{(x^2+y^2)}_{>0}\underbrace{(x+y)}_{<0}\underbrace{(x-y)}_{>0} < 0$. Но т.к. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y) > x$, то $x < 0$. Допущение неверно.

Доп., что $y > 0 > x$ (т.е. $y$ и $x$ разных знаков) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(x^2+y^2)}_{>0}\underbrace{(x+y)}_{<0}\underbrace{(y-x)}_{>0} < 0$. Но т.к. $(x^2+y^2)(x+y)(y-x) > y$, то $y<0$. Допущение неверно.

Таким образом $x$ и $y$ не могут быть разными по знаку $\Rightarrow$ $x \cdot y$ не может иметь знак „–". „+" же оно иметь может, вот пример:

$x = -1 \neq 0$
$y = -1 \neq 0$

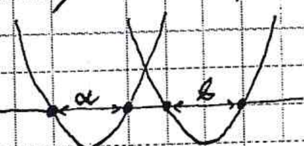
$$\begin{cases} (-1)^4-(-1)^4 > -1 \\ (-1)^4-(-1)^4 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -1 \\ 0 > -1 \end{cases}$$ верно

Ответ: „+".

№11.3.

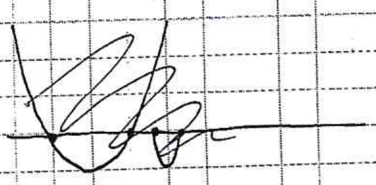
Нетрудно заметить, что провести параболу через две любые из данных точек так, чтобы она касалась $y=-1$, можно единственным образом (при этом ветви направлены вверх).

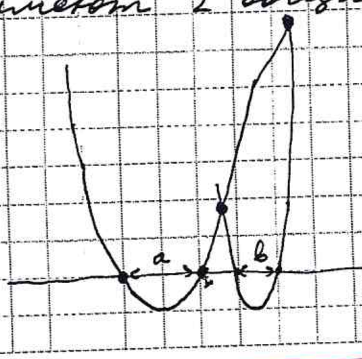
Две параболы, расстояния между данными точками которых равны, имеют только одну общую точку:




$a=b$

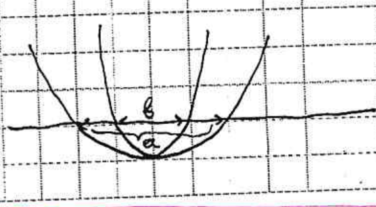
Если же такие расстояния не равны, то такие параболы имеют 2 общие точки:






$a \neq b$

или 1 общ. т.:

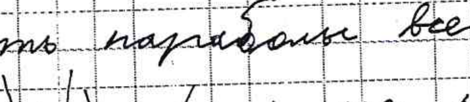



+!

Оценим сверху максимальную сумму, которую мог получить Олег. Назовём то расстояние, о котором я писал ранее длиной параболы (её возможные значения: от 1 до 100).

1 Если среди нарисованных Олегом графиков нет параболы какой-либо возможной длины, то расположим параболы по возрастанию длины без повторений (их не больше 99), а все оставшиеся ~~графики~~ параболы оставим в стороне (их не меньше 101). Для каждой параболы в стороне найдётся такая парабола из расположенных по возрастанию, которая имеет ту же длину. Но среди парабол в стороне тоже по крайней мере две будут иметь одинаковую длину. Таким образом, среди написанных Олегом на доске чисел по крайней мере будет $101 + 1 = 102$ единицы, а это значит, что сумма всех чисел не больше, чем

$2 \cdot 19900 - 102 = 19698$. Значит, чтобы Олег мог получить число 39699, он должен был использовать параболы всех возможных длин.




– параболы по возрастанию длин. (100 штук)

В стороне останется ровно 100 парабол. Для каждой параболы в стороне найдётся парабола из расположенных по возрастанию, имеющая ту же длину => ~~будет~~ такие параболы создают пары, имеющие по 1 общей точке =>
=> по крайней мере 100 единиц на доске есть.
~~Также~~ Парабола длиной 100 одна => из парабол в стороне минимум две имеют одинаковую длину =>
=> на доске уже по крайней мере 101 единица => сумма всех

чисел на доске $\leq 2\cdot 19900 - 101 = 39699$. Значит, чтобы Олег мог получить ровно 39699, парабол с общей вершиной быть не должно (т.к. они дают 1 общую т.) Также 99 парабол в стороне должны ~~Параболы~~ иметь разные длины (*)

Параболы с чётной длиной могут касаться $y=-1$ в точках $\underbrace{(1;-1);(2;-1);\ldots;(99;-1)}_{99\text{ точек}}$. Среди парабол по возрастанию 50 с чётной длиной $\Rightarrow$ ~~50 точек заняты~~ другие параболы иметь вершины в ~~этих~~ точках не могут. Доступны только $99-50=49$ вершин. Из (*) следует, что из парабол в стороне минимум 49 имеют чётную длину. Значит, они должны занять все доступные вершины. Но тогда парабол с нечётными длинами будет $50+51=101$. Параболы с нечётной длиной могут касаться $y=-1$ в точках

$$\underbrace{(0,5;-1);(1,5;-1);\ldots;(99,5;-1)}_{100\text{ точек}}$$

! ~~Но у нас 101 парабола~~ Но у нас 101 парабола с нечёт. длиной

$\Rightarrow$ по крайней мере 2 из них будут иметь общую вершину. Ранее доказали, что Олег мог получить 39699 только если парабол с общей вершиной нет.

Таким образом, он не мог получить 39699 :)

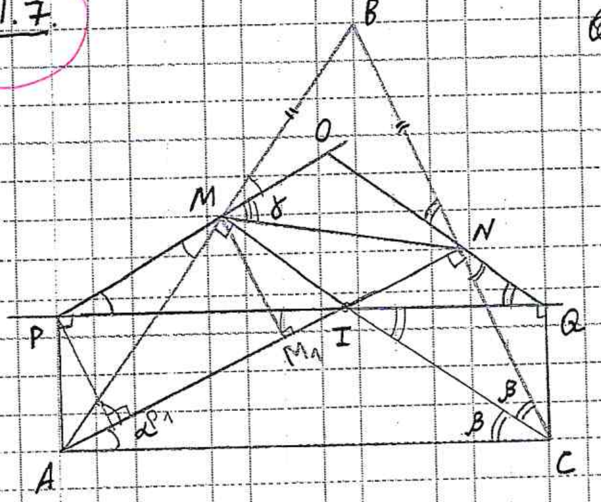
Ответ: нет.

5

ЛИСТ 1 ИЗ 5 | М1-11-20
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 2 | 0 | 0 | 16 |

№11.7



~~BMA AQ~~ Обозначим $\angle IAB = \angle IAC = \alpha$
$\angle ACI = \angle ICB = \beta$
(т.к. I – т. пересечения биссектрис).
$PQ \parallel AC \Rightarrow \angle AIP = \alpha$,
$\angle QIC = \beta$

$\triangle API \sim \triangle IMA$ (по 2 углам $\angle MAI = \angle PIA = \alpha$; $\angle API = \angle IMA$ т.к. IM – радиус впис. окр. $\triangle ABC$, ~~проведённый~~ в т. касания $\Rightarrow IM \perp AB$) $\Rightarrow \angle PAI = \angle MIA$.

AI – общая сторона этих подобных $\triangle \Rightarrow \triangle API = \triangle IMA$ (по 2 углам и стороне между ними) $\Rightarrow$ высоты этих $\triangle$ из точек P и M на AI равны и параллельны ($PP_1 \perp AI$; $MM_1 \perp AI$) $\Rightarrow PP_1M_1M$ – параллелограмм с прямым углом $\Rightarrow$ это прямоугольник $\Rightarrow PM \parallel P_1M_1 \Rightarrow PM \parallel AI$. Аналогично доказывается, что $CI \parallel NQ$.

$\angle MPI = \angle AIP = \alpha$; $\angle NQI = \angle QIC = \beta$. (накрест лежащие)
$\angle PMA = \angle MAI = \alpha$; $\angle QNC = \angle ICQ = \beta$

что такое т. О?

$\Rightarrow \angle BMO = \angle PMA = \alpha$; $\angle BNO = \angle QNC = \beta$ (вертикальные)

$BM = BN$ – касательные, проведённые из одной т. к окр., впис. в $\triangle ABC$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BNM = \angle BMN$. Обозначим $\angle OMN$ как $\gamma$.

$\angle BMN + \angle BNM = 180° - ABC = 180° - (180° - 2\alpha - 2\beta) = 2(\alpha + \beta)$

$(\angle BMO + \angle OMN) + (\angle BNO + \angle ONM) = 2(\alpha+\beta)$

$\alpha + \gamma + \beta + \angle ONM = 2(\alpha+\beta)$

$\angle ONM = \alpha + \beta - \gamma$

~~$\angle ONM + \angle OMN = 180° - \angle MON = 180° - (180° - \angle OPQ - \angle OQP) =$~~
~~$= \alpha + \beta$~~ ~~$\angle BN$~~ ~~$\angle PQN$~~

$\angle BMN = \angle BNM \Rightarrow \gamma + \alpha = (\alpha + \beta - \gamma) + \beta$
$\angle OMN = \gamma = \beta$
$\angle ONM = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$

Значит, $\angle PMN = 180° - \gamma = 180° - \beta$ он в сумме с $\angle PQN = \beta$

даёт 180° => MNQP – вписанный четырёхугольник =>
=> точки M, N, P, Q лежат на одной окр.
ч.т.д.

+ НА

№ 11.6. +

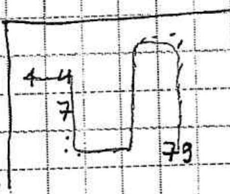
Допустим обратное (что такие клетки не найдутся).

Рассмотрим 3 группы чисел (по 27 чисел в каждой):

1 группа: все числа от 1 до 81, дающие в остатке при делении на 3 ноль;
2 группа: — " —, единицу;
3 группа: — " — двойку.

Числа, разность которых ⋮6, находятся в одной группе, т.к. чтобы разность чисел была ⋮6, она должна быть ⋮3, а разность чисел, дающих разные остатки при делении на 3 не может быть ⋮3. (*)

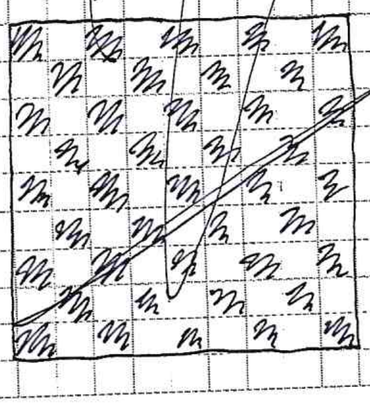
Любые 2 числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках => все числа одной группы создают в таблице незамкнутую ломаную, концы которой 1 и 79 (1 гр.)
2 и 80 (2 гр)
3 и 81 (3 гр)




Назовём такую ломаную „змейкой".

~~Чтобы наше допущение выполнялось (с учётом (*)) необходимо, чтобы хотя бы одна змейка проходила через хотя бы 2 угловые клетки. (**)~~

~~Раскрасим все клетки таблицы в чёрный и белый.~~

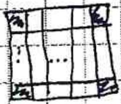


~~Получилось 40 белых и 41 чёрная клетка.~~

~~Такая (**) змейка ~~имеет на одну клетку более~~ содержит чёрных клеток на 1 больше, чем белых~~

У на ~~всего~~ 3 змейки, а угла у таблицы 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ хотя бы одна змейка пройдёт через 2 угловые клетки.
Нетрудно понять, что разность чисел в угловых клетках, через которые проходит такая змейка кратна 2. Докажем это: ~~[illegible]~~ чтобы попасть из одной угловой клетки в другую необходимо ~~[illegible]~~ сделать чётное число ходов (это становится очевидным, если раскрасить все клетки таблицы как шахмат. доску:



тогда все угловые клетки одного цвета)

$\Rightarrow$ разность чисел в угл. клетках равна $3\cdot k$, где $k$ - число ходов, (**)
но $k$ - чётное $\Rightarrow$ и разность $\vdots 2$. Доказали.
Из (**) видно, что разность также кратна 3 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ разность кратна $\vdots 6$.
Таким образом, допущение неверно $\Rightarrow$ всегда найдутся такие клетки.
Ответ: да

№11.8. Пусть алфавит такой: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Есть пример на $(2n+1)$ букву: $\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_n}_{n}\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_n}_{n} a_1$ — пример

Докажем, что он подходит.
~~Нельзя вычеркнуть все буквы, кроме 4, чтобы осталось~~ $a_k a_k a_m a_m$ ~~[illegible]~~ идёт в алфавите раньше, то ~~$(k<m)$~~
Допустим обратное, т.е. что можно вычеркнуть все буквы, кроме 4, чтобы осталось $a_k a_k a_m a_m$.
Тогда $a_k$ идёт в алфавите раньше, чем $a_m$ (для нашего примера). $\underbrace{\ldots a_k \ldots a_m \ldots}_{n}\underbrace{a_k \ldots a_m \ldots}_{n} a_1$

обоснование примера

Видно, что для $m \neq 1$ получить $a_k a_k a_m a_m$ нельзя;
Для $m = 1$ также нельзя получить $a_k a_k a_1 a_1$,
~~[illegible]~~ т.к. среди букв с 1 по $n$ и с $(n+1)$ по $2n$ $a_k$ и $a_m$

встречаются только по 1 разу. Допущение неверно => => пример подходит.

<u>Оценка</u> (~~...~~ кол-во букв в хорошем слове $\leq 2n+2$).

Если докажем, что в хорошем слове не может быть $(2n+2)$ буквы, то понятно, что оценка будет доказана (т.к. если предположить существование хорошего слова с числом букв >, чем $(2n+2)$, то вычёркиванием всех букв, ~~...~~ начиная с $(2n+3)$-ей, получаем слово с $(2n+2)$ буквами).

Чтобы доказать, что в хорошем слове не м.б. $(2n+2)$ буквы, достаточно доказать, что среди $(2n+2)$ букв хорошего слова хотя бы 2 повторяются трижды(*), т.к. доказав это, простым перебором всех вариантов убеждаемся, что пос-ть $a_k a_k a_m a_m$ найдётся.

a b a b a b
a b a b b a
a b b a b a
a b b a a b

другие 4 случая аналогичны (там меняются местами a и b)

А ЕЩЕ aaabbb

2 буквы не могут встречаться трижды

А почему не может встречаться трижды

Докажем ~~...~~ это (*).
рассмотрим 3 случая

n букв (1) | n букв (2) | a b

1) если среди первых n букв (1) и следующих n букв (2) нет повторений => буквы на $(2n+1)$ и $(2n+2)$ позициях встречаются по 1 разу в (1) и (2).

=> всего их (и a, и b) ~~...~~ не менее 3 штук.

2) если среди одной из группы букв (1) и (2) нет повторений ~~...~~ (например в (1) – это не ограничивает общности) => буквы a и b содержатся в (1) по 1 разу.

2.1) если среди (2) a и b тоже найдутся => ~~всего их в слове не менее~~ они встречаются трижды.

2.2) если среди (2) a и b не найдутся, то в (2) как минимум 2 числа будут повторяться. А если это так, то ~~...~~ перебором поймём, что

где?

в (2) найдётся посл-ть $a_k a_k a_m a_m$ => слово не будет хорошим.

~~3) если ни в (1), ни в (2) нет повторений, то~~ ~~[illegible]~~

3) если и в (1) и в (2) есть повторения. тогда либо в (1), либо в (2) найдётся посл-ть $a_k a_k a_m a_m$ => слово не будет хорошим.

Доказано.

Ответ: $2n+1$.