1	2	3	4	5	Σ
5	7	2	0	0	14

№1

Пусть x - данное натуральное число, $x > 1000000$, тогда $x \equiv a \pmod{40}$, $x \equiv a \pmod{625}$, $a \geq 0$, $a < 40$ - т.к a - остаток от деления на 40, не может быть больше 40.

$$\left.\begin{array}{l} x-a \,\vdots\, 40 \\ x-a \,\vdots\, 625 \end{array}\right| \Rightarrow x-a \,\vdots\, \text{НОК}(625, 40) \Rightarrow x-a \,\vdots\, 5000$$

$\Rightarrow$ $x-a$ можно представить как $5000 \cdot k$, $k \in N$.
$x = 5000k + a$, $5000k$ оканчивается на 000, т.к $a < 40$ $5000k + a$ - при сложении разряд тысяч не изменится $\Rightarrow$ там останется 0.

Разряд тысяч - 4й разряд

Ответ: 0.

№2

$$\begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ y^4 - x^4 > y \end{cases} \Rightarrow x^4 - y^4 + y^4 - x^4 > x + y \Rightarrow x + y < 0 \Rightarrow$$

Одно из чисел $x, y < 0$;
1. Если $x < 0$ и $y < 0$, то $xy > 0$
2. Если $x < 0$ и $y > 0$ (или наоборот), то $xy < 0$

• Рассмотрим случай 1:
При $x = y$: $x^4 - y^4 = 0$, $0 > x$
$y^4 - x^4 = 0$, $0 > y$ удовлетворяет условию.
Например при $x = y = -2$

$x \cdot y = (-2) \cdot (-2) = 4$ - положительное

$x^4 - y^4 = (-2)^4 - (-2)^4 = 0, \quad 0 > -2$

$y^4 - x^4 = (-2)^4 - (-2)^4 = 0, \quad 0 > -2$ } удовлетворяют условию.

Произведение xy может быть положительным.

• Рассмотрим случай (2):

$x < 0, \; y > 0$

$x + y < 0$ - доказано ранее.

$y^4 - x^4 > y, \; y > 0 \Rightarrow$

$y^4 - x^4 > 0 \Rightarrow y^4 > x^4 \Rightarrow |y| > |x|$

$|y| > |x|$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ $\Rightarrow y > -x \Rightarrow y + x > 0$

$y > 0 \Rightarrow |y| = y$

Но ранее доказано, что $x + y < 0$, значит этот случай невозможен!

Ответ: Произведение xy всегда положительно $\Rightarrow$ знак "+".

№3

Заметим, что если графики всех квадратичных функций касаются $y = -1$ (т.е. их вершина лежит на ~~...~~ $y = -1$) и проходит через точки $(x, 0)$, где $x \in [0, 100]$, то их ветви направлены вверх.

Любую квадратичную функцию, график которой был нарисован можно представить в виде:

$y = \frac{(x-b)^2}{a^2} - 1$ (b, a - не обязательно целые, но $a^2 > 0$, $b > 0$, $b \in (0, 100)$)

От b зависит координата вершины параболы, от a зависит направление ветвей, при изменении a меняется „расстояние" между точками (отмеченными на оси Ox), через которые проходит график этой функции.

Докажем, что любые два графика имеют две общие точки только в том случае, если в их алгебраическом представлении различное a:

f_1: $y = \frac{(x-b_1)^2}{a_1^2} - 1$

f_2 $y = \frac{(x-b_2)}{a_2^2} - 1$.

1. Если $a_1 = a_2$, то графики имеют только одно пересечение:

$\frac{(x-b_1)^2}{a^2} - 1 = \frac{(x-b_2)^2}{a^2} - 1 \Rightarrow (x-b_1)^2 = (x-b_2)^2$

$(x-b_1)^2 - (x-b_2)^2 = (x-b_1-x+b_2)(x-b_1+x-b_2) = 0$

$(b_2-b_1)(x-b_1+x-b_2) = 0 \Rightarrow 2x = b_1 b_2 \Rightarrow x = \frac{b_1 b_2}{2}$ - только одно решение ($(b_2-b_1) \neq 0$, т.к при $b_1 = b_2$ - функции не различны) $\Rightarrow$ ~~на~~ только одно пересечение (оно обязательно будет).

2. $a_1 \neq a_2$

Если $b_1 = b_2$ графики касаются в точке $(b, -1)$ – вершинами – только одна общая точка.

При $b_1 \neq b_2$:

$$y = \frac{(x-b_1)^2}{a_1^2} - 1 \qquad y = \frac{(x-b_2)^2}{a_2^2} - 1$$

$$\frac{(x-b_1)^2}{a_1^2} - 1 = \frac{(x-b_2)^2}{a_2^2} - 1 \qquad \left(\frac{x-b_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x-b_2}{a_2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{x-b_1}{a_1} - \frac{x-b_2}{a_2}\right)\left(\frac{x-b_1}{a_1} + \frac{x-b_1}{a_2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x-b_1}{a_1} - \frac{x-b_2}{a_2} = 0 \\ \frac{x-b_1}{a_1} + \frac{x-b_2}{a_2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_2(x-b_1) - a_1(x-b_2) = 0 \\ a_2(x-b_1) + a_1(x-b_2) = 0 \end{array}\right. \quad a_1, a_2 \neq 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_2x - a_2b_1 - a_1x + a_1b_2 = 0 \\ a_2x - a_2b_1 + a_1x - a_1b_2 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (a_2-a_1)x = a_2b_1 - a_1b_2 \\ (a_2+a_1)x = a_2b_1 + a_1b_2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2-a_1} \\ x_2 = \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{a_2+a_1} \end{array}\right.$$

Докажем, что $x_1 \neq x_2$:

Если $x_1 = x_2$, то $\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2-a_1} = \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{a_2+a_1}$

$$(a_1+a_2)(a_2b_1 - a_1b_2) = (a_2-a_1)(a_2b_1 + a_1b_2)$$

$$a_1a_2b_1 - a_1^2b_2 + a_2^2b_1 - a_1a_2b_2 = a_2^2b_1 + a_1a_2b_2 - a_1a_2b_1 - a_1^2b_2$$

$2a_1a_2b_1 = 2a_1a_2b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ (случай уже рассмотрен)

При $b_1 \neq b_2$ графики функций с различными a имеют 2 пересечения. +

Предположим, что в результате сложения количеств всех общих точек Олег получил 39699 (всего пар графиков 19900). $39699 = 101 \times 1 + 19799 \times 2$ ($101 + 19799 = 19900$). Т.е 101 пара графиков имела одну общую точку, 19799 - 2. (Несложно заметить, что при другом соотношении пар графиков имеющих одну и две общие точки, не получится суммарно 39699 ~~точ~~ точек).

Заметим, что, так как каждый график проходит через две из отмеченных точек на прямой OX, а a напрямую зависит от того, ~~как~~ через какие две точки проходит график (от расстояния между этими точками), то в алгебраической записи ~~[illegible]~~ квадратичных функций a может принимать только 99 различных значений. (Т.к расстояние между отмеченными точками может быть: 1, 2, 3, 4 ... 100).

100 (не 99)!

~~[illegible]~~ При этом для a соответствующего расстоянию между точками = 100 существует только один график.

Всего графиков 200, возможных коэфицентов 98 + 1 (99 может быть только один раз).
Каждый раз, добавим один график: Если с таким коэфицентом уже был, то прибавляется минимум количество графиков, которых с таким коэф уже было (к. кол-ву пар графиков с одним пересечением). [Если каких-то графиков с одинаковым коэфицентом больше 14, то среди них будет: $1+2+3+\ldots+10+\ldots+14=\frac{14\cdot15}{2}=105>101$ (условие для 39699 не выполнится) => Каждого вида графика с одинаковым коэфицентом не больше 13]
Для того, что бы достигнуть наименьшего кол-ва пар лишь одно пересечение каждой раз необходимо добавлять график с коэф. который (на тот момент) использовали наименьшее кол-во раз).
почему?
Вначале добавим 99 графиков с различными коэф., после чего 98 (с этими же, от $a_1 \ldots a_{98}$), с каждой прибавится по одной паре всего 98 пар, но осталось добавить ещё 3 графика, каждой даст не менее 2 пар, тогда всего пар графиков имеющих ровно одно пересечение будет не меньше $98+3\cdot2=106>101$ (без учёта случая 1/2).
а 39699 может получится только в том случае

а если по другому?

если таких графиков ровно 101 ⇒ это невозможно.
Ответ: невозможно.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

№6

Разделим все числа на три „последовательности"

1, 4, 7, 10, 13 ... 79 $(a \equiv 1 \pmod 3)$

2, 5, 8, 11, 14 ... 80 $(a \equiv 2 \pmod 3)$

3, 6, 9, 12, 15 ... 81 $(a \equiv 0 \pmod 3)$

Заметим, что если поставить в любую клетку таблицы число из любой „последовательности", то соседние с ним числа (соседние в последовательности) можно поставить только в соседние с этим ~~числом~~ числом клетки.

Если в каком либо уголке таблицы стоит число из одной последовательности и в другом уголке нашлось число из этой же последовательности (такие найдутся, так как последовательностей три, а уголка в таблице 4, по принципу Дирихле), то между ними будет стоять нечетное кол-во чисел из последовательности. Докажем это:

Рассмотрим „путь" от числа из первого уголка во второй.

Начнем с уголка в котором стоит наименьшее число (тогда до второго уголка можно „добраться" через клетки с числами: a_1+3; a_1+6 ... a_2-3, a_1 - первое число, число из первого уголка) a_2 - из второго уголка)

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 8 | М1-11-21
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

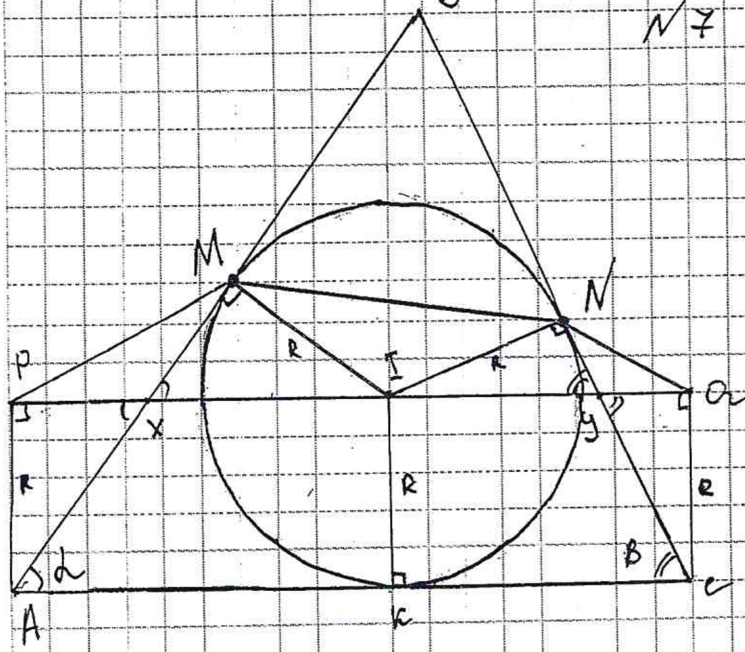
Следующее после a_1 число может стоять либо на одну клетку вбок, либо на одну клетку вверх/вниз, а между двумя уголками либо 7 клеток по вертикали/горизонтали, либо 7 клеток и по вертикали, и по горизонтали. Тогда, что бы переместиться из одного уголка в другой необходимо сместиться на 8 клеток (по вертикали/горизонтали) или на 16 (вертикаль + горизонталь). Несложно заметить, что все остальные перемещения (⇄ или ⇅) происходят так же чётное кол-во раз (если лишний раз „пройти" на клетку вверх, то потом так же придётся где-нибудь спуститься). Тогда если в одном уголке стоит число a, то в другом — $a+2n\cdot 3$ (±3) ($2n$ - число перемещений (8, 16 - чётное, все ост. перемещения - чет. кол. раз). т.к. с каждым перемещением мы переходим к следующему члену последовательности, т.е. прибавим „3"). Разность между этими числами стоящими в уголках — $a+2n\cdot 3-a=6n\ \vdots\ 6 \Rightarrow$ Всегда найдутся две угловые клетки разность чисел в которых делится на 6.

Ответ: верно

+ НА

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 8	М1-11-21 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)



№7

Пусть K - точка касания ω стороны AC:

$IM = IN = IK = R$

$IK \perp AC$ (как радиус и касат. пр. через т. касания).

Т.к. $PQ \parallel AC$, $IK \perp AC \Rightarrow$ $IK = dist(AC, PQ)$.

$AP \perp PQ$, $QC \perp PQ$, $PQ \parallel AC \Rightarrow PA = QC = dist(AC, PQ) = IK = R \Rightarrow \triangle APX = \triangle IMX$ ($X = PI \cap AM$, $\angle PXA = \angle MXI$ как верт., $\angle APX = \angle XMI = 90°$), $\triangle INY = \triangle CQY$ ($Y = NC \cap IQ$, $\angle IYN = \angle CYQ$ как вертикальные, $\angle INY = \angle CQY = 90°$).

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$,

$\alpha = \angle PXA = \angle XAC$ - как вертикальные при // прямых $\Rightarrow PXM = 180 - \alpha$

$\beta = \angle QYB = \angle YBA$ - как вертикальные при // прямых $\Rightarrow \angle NYQ = 180 - \beta$.

т.к. $\triangle APX = \triangle IMX$, $PX = XM$ (соответств. эл.) $\Rightarrow \triangle PXM$ - равнобедрен. $\Rightarrow$

$\angle MPX = \angle PMX = \frac{180 - (180-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$

т.к. $\triangle CYQ = \triangle IYN$, $NY = YQ \Rightarrow \triangle NYQ$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle QNY = \angle NQY = \frac{180-(180-\beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$

$\angle ABC = 180 - \alpha - \beta$; $\angle MIN = 360 - \angle BMI - \angle BNI - \angle MBN =$
$= 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$ ($\angle IMB = \angle INB = 90$, между радиусом и касательной).

$MI = R = IN \Rightarrow \triangle MIN$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle IMN = \angle INM = \frac{180-(\alpha+B)}{2} = 90 - \frac{\alpha+B}{2}$

$\angle PMN = \angle PMX + \angle XMI + \angle IMN = \frac{\alpha}{2} + 90 + 90 - \frac{\alpha+B}{2} = 180 - \frac{B}{2}$ + $\Big| \Rightarrow$

$\angle PQN = \frac{B}{2}$ +

$\angle PMN + \angle PQN = 180$, противолежащие углы в четырехугольнике $PMNQ \Rightarrow$ Около $PMNQ$ можно описать окружность $\Rightarrow$ точки P, M, N, Q лежат на одной окружности, ч.и.т.д.

№8

1. Докажем, что если в каком-либо слове есть хойя бн ✓ две различные буквы, которые встречаются более (т.е. хойя бн³) двух раз, то это слово не является хорошим. Рассмотрим эти 6 букв (оставим только 6, они могут идти подряд, т.к. мы рассматриваем не слово, а отдельно взятые из него буквы).

Вычеркнем все буквы из этого слова, так что бы осталась только эти 6 букв.

$\underbrace{\_\ \_\ \_}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}$ Разделим их на 2 группы из трех подряд идущих букв. Тогда в первой группе обязательно встретятся две одинаковые назовем их -а буквы ✓ (буквы три, а различаются всего две, по принципу Дирихле). Тогда во второй группе есть как минимум две буквы (отличные от а), назовем их в. Это произойдет, так как

Т.к в первой группе гарантировано есть две буквы а, всего их 3 => во второй не больше одной буквы а => не меньше 2х букв в.
Если мы вычеркним из первой группы букву так, что бы остались две буква а, а из второй так, что бы остались две букви в, то останется последовательность аавв – а значит слово уже нельзя назвать хорошим.

2. ~~Докажем, что если в слове какая либо буква повторяется больше 3х раз, то все остальные не могут повториться 2 и боле раза.~~
~~Пусть а – повторяется боле 3х раз. Тогда в слове ... 4 подряд идущие а. Т.к.~~
~~... в слове не может быть.~~

Рассмотрим случай, когда в слове какая-либо буква появляется больше трех раз.
Пусть а появляется ~~...~~ К раз.

$$a\_a\overset{1}{\underline{b}}a\overset{2}{\_}a\overset{3}{\_}a\overset{4}{\_}a\overset{5}{\_}a\ldots\overset{k-3}{\_}a\_a$$

Тогда буква стоящие в промежутках 1, 2, 3, 4, ... к-3 не могут быть в хорошем слове больше одного раза.
Если такая буква (в) появляется еще раз справа или слева от первой, то с другой

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 6 ИЗ 8 | М1-11-21
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

стороны гарантировано будет 2 ~~подряд~~ буквы а.
Тогда можно вычеркнуть все буквы кроме этих двух а и двух в так, что останется аавв или ввaa, что не соответствует условию необходимому для того, чтобы слово считалось хорошим.

Посчитаем максимальное кол-во букв в таком слове.
Если все остальные буквы встречаются 2 раза (3 не могут, т.к. а > 2х раз), то всего букв: $K + (K-3) + 2(n - (K-3+1)) = 2K - 3 + 2n - 2K + 4 = 2n+1$

букв а; стоящих между буквами а, в каждом промежутке по одной букве

В таком случае не может хорошее слово содержать более $2n+1$ букв.

3. Рассмотрим случай, когда а (буква встречающаяся наиб кол-во раз) встречается три раза, тогда все остальные буквы не могут встречаться более двух раз => max количество букв в таком хорошем слове:

$2(n-1)+3 = 2n+1$, Этот случай возможен:
$\underbrace{abcde\ldots}_{n}\ \underbrace{abcde\ldots}_{n}\ \underbrace{a}_{1}$ — $2n+1$ буква.

4. Если ни одна буква не встречается больше ~~трех~~ двух раз, то max кол-во ~~слов~~ букв в слове — $2n < 2n+1$. Рассмотрим все случаи, связанные с ~~max возможным колвом~~

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 7 ИЗ 8	М1-11-21 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

буквой встр наибольшее кол во под (боле трех, три подр или менее трех), для каждого случая было найдено max. кол-во букв в хорошем слове, можно сделать вывод, что это $2n+1$

Это возможно, пример приведен ранее.

Ответ: $2n+1$.

№10.

Т.к x, y, z - положительные, числа на доске постоянно возрастают ($\frac{1}{xy}, \frac{1}{xz}, \frac{1}{yz}$ - положительные) $\Rightarrow$ $\frac{1}{xy}, \frac{1}{xz}, \frac{1}{yz}$ - убывают.

Через минуту произведение xyz преобразовывается в $\left(x+\frac{1}{yz}\right)\left(y+\frac{1}{xz}\right)\left(z+\frac{1}{xy}\right) = xyz+3+\frac{3}{xyz}+\frac{1}{(xyz)^2}$

Тогда $\lim\limits_{x,y,z\to+\infty} xyz \to \dfrac{xyz+3+\frac{3}{xyz}+\frac{1}{(xyz)^2}-xyz}{1} = 3$???

~~Произведение xyz~~

Произведение $x, y, z \to 3 \Rightarrow xyz$ всегда <3, но т.к x, y, z всегда увеличиваются когда-нибудь они достигнут значений x_1, y_1, z_1, таких, что

~~$(x_1+1)(y_1+1)(z_1+1) > 3 \Rightarrow$~~ $\left.\begin{array}{l}(x_1+1)y_1z_1 > 3\\ (x_1)(y_1+1)z_1 > 3\\ (x_1y_1)(z_1+1) > 3\end{array}\right\} \Rightarrow$

~~x, y, z уже никогда не станут $x+1$, тем более $x+n$, $n\in\mathbb{N}$, т.е не стоит целым. Для y и z соответственно.~~

Т.к. $xyz \xrightarrow[x,y,z\to\infty]{} 3$, а x, y, z постоянно увеличиваются, то x, y, z так же имеют предела => существует какое-то k, больше которого никогда не станет x => в какой-то момент x пройдет через $[k]$ (целую часть k) и будет $[k] < x < k$ - не целым числом => начиная с некоторого момента x не станет целым числом, для y и z доказываем соответственно => x, y, z начиная с некоторого момента перестанут становиться целыми числами => существует такой момент, после которого ни одно число из x, y, z уже не станет целым, ч.т.д.

НА