Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 5

М1-9-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	2	0	7	23

№9.1

Ответ: нет, необязательно.

Пример: Если палочки имели ~~длины~~ длины 1; 2; 3; 4; 5; 5, то ослик мог составить треугольники со сторонами 1, 5, 5 и 2, 3, 4. Тогда жёлтым цветом он покрасит палочки 1, 2 и 3, но из них нельзя составить треугольник, т. к. не выполняется неравенство тр-ка $1+2>3$. Почему мог?

~~№9.3~~

~~Ответ: 4~~

~~Пусть $a=5$ $b=3$ $c=1$~~

~~Тогда $\frac{5\cdot 3+1^2}{5+3}=2$~~

~~Число $a+b=5+3=8$ имеет 4 делителя: 1, 2, 4, 8.~~

№9.3

Ответ: 3

Пусть $a=15$, $b=10$, $c=5$

Тогда $k=\frac{ab+c^2}{a+b}=\frac{150+25}{25}=\frac{175}{25}=7$.

Число $a+b=25$ имеет только 3 нат. делителя: 1, 5, 25.

Почему нельзя меньше?

№9.2

Сложим неравенства из условия:

$(x^2-x)+(y^2-y) > x^2+y^2$

$x^2-x+y^2-y > x^2+y^2$

$-x-y > 0$

$x+y < 0$ (1)

Значит, хотя бы одно из чисел отрицательное.

а) Если xy имеет знак $-$ (т.е. $xy<0$), то ровно одно из чисел отрицательное, а другое — положительное. ~~Пусть это будет число~~ ~~y~~ Пусть отрицательным будет y, а положительным — x. (Смысл неравенств не меняется при замене x на y, а y — на x).

Из (1) имеем:

$-y > x$

Т.к. $y<0$, а $x>0$, то:

$|y| > |x|$

Это значит, что

$y^2 > x^2$

$x^2 < y^2$ (2)

~~[illegible]~~ Т.к. x — положит., то:

$-x < 0$ (3)

Сложим (2) и (3):

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 5

М1-9-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$x^2 - x < y^2$

Получили противоречие с условием, значит xy не может иметь знак $-$.

б) Пусть $x = y = -2$

Выполняются условия:

$x^2 - x > y^2$ т.к. $(-2)^2 + 2 > (-2)^2$

$y^2 - y > x^2$ т.к. $(-2)^2 + 2 > (-2)^2$

а также $xy > 0$, т.е. xy имеет знак $+$.

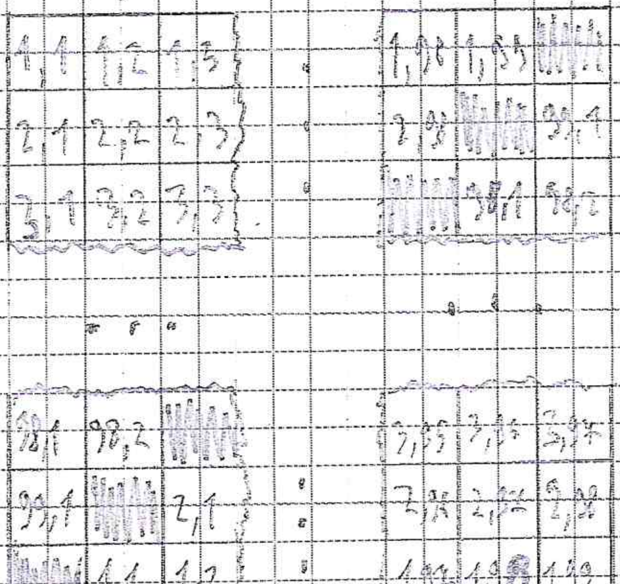
Ответ: только знак $+$.

№ 9.5

Ответ: Петя.

Приведём пример выигрышной стратегии для Пети.

Первым ходом Петя должен закрасить в чёрный цвет все клетки одной из длиннейших диагоналей. Тогда вся доска разобьётся на две части. Поставим в симметричных каждой белой клетке пару чисел следующим образом:



В одной из образовавшихся частей нумерация следующая: первое число — номер строки (сверху вниз), второе — номер столбца (слева направо).

Во второй части: первое число — номер строки (снизу вверх), второе — ~~номер~~ расстояние до закрашенной клетки в этой строке.

Заметим, что наборы пар чисел в одной и во второй части совпадают. Когда Вася ходом закрашивает какие-то клетки в одной части, Петя должен закрасить клетки с такими же номерами в другой части. Так как изначально ни одна клетка в этих двух частях не закрашена, ~~и~~ то Петя всегда сможет сделать ход после Васи, т. е. такая стратегия — выигрышная для Пети.

(~~Тут~~ можно убедиться, что при указанной нумерации клеток, ~~диагональная~~ вертикальная серия клеток любой из частей доски соответствует диагональной серии клеток из другой части, поэтому если Вася будет ходить по правилам, то и Петя не будет их нарушать при такой стратегии)

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 6 | М2-9-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	5	0	7	0	19

№9.6

(младшем)

Заметим, что в ~~последних~~ последнем разряде хотя бы одного из чисел стоит ~~чёрн~~ чёрная цифра. Если это не так, то все числа заканчива-

~~1) Если последняя цифра числа c — чёрная, то складывается нечет~~

~~2)~~

ются на нечётную цифру. Но это невозможно, т.к. сумма нечётных чисел даёт чётное, т.е. ~~тогда~~ получим противоречие. Значит хотя бы одна из 30 цифр — чёрная.

Пример с одной чёрной цифрой:

$$\begin{array}{r} 1999999999 \\ +\,1999999999 \\ \hline 3999999998 \end{array}$$

$a = 1999999999$
$b = 1999999999$
$c = 3999999998$

Ответ: 29

~~№9.7~~

~~Заметим, что можно все числа разбить на 3 группы, отлич. на 3 числа:~~

1, 4, 7...
2, 5, 8...
3, 6, 9...

Тогда эти числа каждой из групп будут образовывать цепочку из клеток, соседних по стороне. Т.к. цепочек 3, а угловых вершин 4, то одна цепочка пройдёт через хотя бы 2 угл. клетки. Так как в цепочке числа отличаются на 3, а ~~эта~~ длина цепочки от одной угловой клетки до другой всегда нечётная,

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 5 | М2-9-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№9.7

Рассмотрим все числа самой верхней строки слева направо. Пусть они равны $a_1, a_2, \dots, a_9$. Тогда по условию:

$a_2 = a_1 \pm 3$

$a_3 = a_2 \pm 3$

$a_4 = a_3 \pm 3$

...

$a_9 = a_8 \pm 3$

На месте $\pm$ может стоять любой из знаков + и −. Пусть k из этих знаков +, а тогда знаков − (минус) 8−k. Тогда:

$a_9 = a_1 + 3k - 3(8-k) = a_1 + 3k + 3k - 24 =$
$= a_1 + 6k - 24$

Тогда разность чисел в левой верхней угловой клетке и в правой верхней угловой клетке равна:

$|a_9 - a_1| = \cancel{a_1 - a_1}\ |(a_1 + 6k - 24) - a_1| =$
$\cancel{= |6k \pm 24|} = |6k - 24|$

k − ~~на~~ целое, значит 6k делится на 6
24 тоже делится на 6, значит и вся разность делится на 6. Таким образом разности чисел в верхних угловых клетках всегда кратна 6.
Ответ: да.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 6	М2-911
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№9.3

Ответ: $2n+1$

Оценка: Докажем, что в хорошем слове не может быть $2n+2$ и больше букв. ~~вхождения~~ От противного: Предположим, что нашлось такое слово, состоящее не менее, чем из $2n+2$ букв. Тогда выполняется одно из двух условий:

1) есть такая буква, которая входит в ~~строку~~ слово не менее 4 раз
2) есть ~~как~~ хотя бы две буквы, которые входят (каждая) не менее трёх раз.

Если ни одно из условий не выполняется, то общее кол-во букв $\leq 2(n-1)+3 = 2n-2+3 = 2n+1$, что ~~невозм~~ противоречит предположению. Разберём оба случая:

~~1) обозначим эту букву за X. Рассмотрим произвольные 4 вхождения этой буквы в слово. Тогда слово выглядит так:~~

~~... X ... X ... X ... X ...~~

2) обозначим ~~первую~~ одну из букв за X, вторую — за Y. Вычеркнем из строки все буквы, кроме произвольных

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 4 ИЗ 6

М2-9-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

трёх вхождений X и трёх вхождений Y. Получившуюся строку из 6 букв разобьём ~~на~~ пополам по середине на 2 группы из 3 букв. Посмотрим на группу, в которую X входит ~~2~~ не менее 2 раз. Тогда в эту группу Y входит не более раза, а значит во вторую группу - не менее двух раз. Значит в одну из групп X входит не менее 2 раз, а во вторую - Y не менее 2 раз. Вычеркнем остальные 2 буквы и получим строку XXYY или YYXX, т.е. ~~стр~~ исход. слово - не хорошее. Противоречие.

1) Будем считать, что все буквы кроме X (которая входит ~~4~~ 4 или больше раз) входят в слово не более 2 раз. (Иначе см. 2 случай)

Пусть X входит в слово k раз.

Тогда слово имеет вид:

$$\ldots \overset{№1}{X} \ldots \overset{№2}{X} \ldots \langle \vdots \rangle \ldots \overset{№k-1}{X} \ldots \overset{№k}{X} \ldots$$
$$№1 \quad №2 \quad №3 \quad \vdots \quad №k-1 \quad №k \quad №k+1$$

Рассмотрим произвольную букву Y, отличную от X. Заметим, что если ~~эта~~ буква стоит в промежутках от №3 до №k-1, то она не может входить в строку дважды, т.к. иначе, где бы ни находилось второе её вхождение, можно вычеркнуть

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 6 | М2-9-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

все буквы, кроме Y и двух каких-то вхождений X так, что получится строка YYXX или XXYY.

От ~ 3 до $\sim k-1$ $k-3$ промежутков, в каждом из них должна стоять хоть одна буква (по утв.) значит хотя бы $k-3$ буквы входят в строку 1 раз, остальные $(n-(k-3)-1)$ входят ≤ 2 раза, X входит в строку k раз. Значит ~~кол-во букв в стр~~ длину слова ~~строки~~ m можно оценить:

$$m \leq k-3+2(n-(k-3)-1)+k$$

$$m \leq \cancel{k}-3+2n-\cancel{2k}+6-2+\cancel{k}$$

$$m \leq 2n+1$$

Это противоречит предположению.

В итоге получили противоречие во всех возможных случаях, значит длина слова ~~строки~~ не больше, чем $2n+1$. Можно заметить, что слово такой длины всегда можно составить следующим образом: первые n букв — все буквы в алфавитном порядке, следующие n букв — тоже все буквы в алф. порядке, а последняя $2n+1$-ая буква — первая буква алфавита. Нетрудно заметить, что слово будет хорошим.

№ 9.7

Заметим, что все числа разбиваются на 3 группы чисел, отличающихся на 3:

1, 4, 7...

2, 5, 8...

3, 6, 9...

Тогда числа каждой из групп стоят в таблице в непрерывной цепочке, соседние по стороне.

Т.к. цепочек 3, а всех угловых клеток 4, то хотя бы одна из цепочек пройдёт хотя бы через 2 угл. клетки. Числа в цепочке (соседние) отличаются на 3, а длина цепочки из одной угловой клетки в другую всегда нечётна, значит если число в одной из угловых клеток на этой цепочке равно x, а во второй угловой — y, то $y = x + 3k$, где k — чётное. Тогда $|x - y| = |3k|$. k — чётное, значит $3k$ делится на 6.

P.S. Длина любой цепочки (пути) из одной угл. клетки в другую всегда нечётна, т.к. нужно сделать чёт. кол-во перемещений по вертикали и по горизонтали (т.к. размеры 9×9), общее кол-во перемещений — чёт, значит длина такой цепочки — нечёт.

Ответ: да.