ЛИСТ 1 ИЗ 3

М1-9-22
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

Задача №1

Пусть длины палочек первого Δ: 2, 70, 71, такой Δ существует т.к. $2+70>71$, $2+71>70$ и $70+71>2$, длины палочек второго Δ: 50, 100, 100, такой Δ существует т.к. $50+100>100$, $50+100>100$ и $100+100>50$. В таком случае жёлтыми окажутся палочки длиной 2, 50 и 70. Заметим, что из них нельзя сложить Δ т.к. $2+50<70$.

Ответ: нет, не обязательно.

Задача №2

Пусть xy отрицательно, тогда x и y разных знаков, без ограничения общности можно считать, что $x<0$, $y>0$. $y>0 \Rightarrow -y<0 \Rightarrow y^2-y<y^2$. $y^2>y^2-y$, $y^2-y>x^2 \Rightarrow y^2>x^2 \Rightarrow |y|>|x|$. $y^2-y>x^2$ и $x^2-x>y^2$, если во 2 неравенстве заменить x^2 на y^2-y, то левая часть увеличится $\Rightarrow$ нер-во останется верным. Итак $y^2-y-x>y^2 \Rightarrow -y-x>0 \Rightarrow x+y<0$. Мы сложили положительное и отрицательное числа и получили результат меньше нуля $\Rightarrow$ модуль отрицательного больше модуля положительного $|x|>|y|$. Получили, что $|y|>|x|$ и $|x|>|y|$, что невозможно $\Rightarrow$ xy не может быть отрицательно.

Пример когда ~~xy~~ xy положительно: $x=y=-1$, $(-1)^2-(-1)>(-1)^2$, $(-1)^2-(-1)>(-1)^2$, $xy=(-1)\cdot(-1)=1$

Ответ: только положительный

Задача №3

Заметим, что т.к. $a, b \in N$, то $a+b \geq 2 \Rightarrow$ у $a+b$ хотя бы 2 натуральных делителя.

Пусть у $a+b$ ровно 2 нат. делителя, тогда $a+b$ – простое.

$\frac{ab+c^2}{a+b} < a \Rightarrow ab+c^2 < a^2+ab \Rightarrow c^2 < a^2 \Rightarrow$ (т.к. $a, c \in N$) $c < a$, аналогично $c < b$.

$\frac{ab+c^2}{a+b} = k \Rightarrow ab+c^2 = k(a+b) \Rightarrow ab+c^2-a^2+a^2 = k(a+b) \Rightarrow$

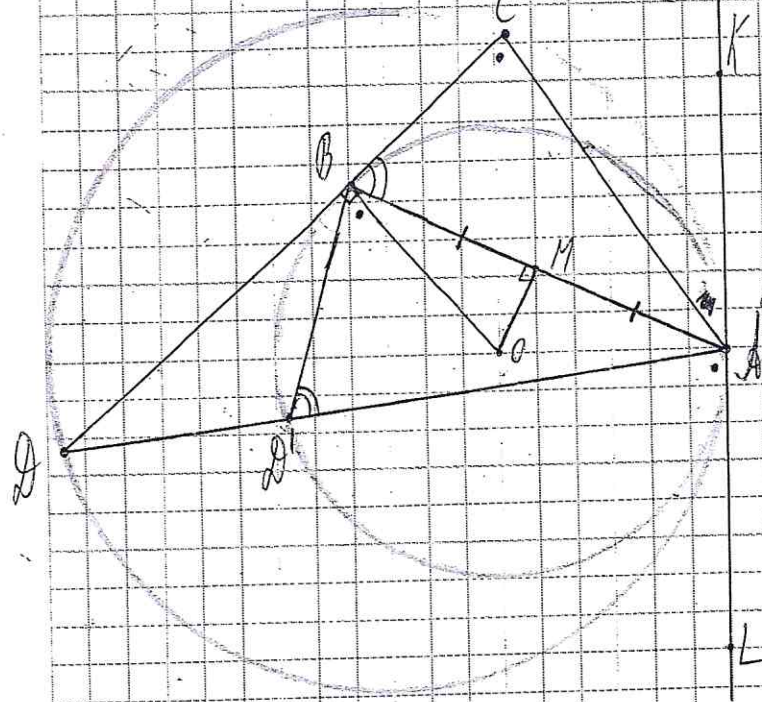
$\Rightarrow a(a+b)+(c+a)(c-a) = k(a+b)$, правая часть кратна $a+b$, $a(a+b)$ тоже кратно $a+b \Rightarrow (c+a)(c-a)$ тоже кратно $a+b$, т.к. $a+b$ – простое, то либо $c+a \vdots a+b$, либо $c-a \vdots a+b$, т.к. $c<b$, то $0 < c+a < a+b \Rightarrow$

$\Rightarrow c+a$ не может быть кратно $a+b$, т.к. $c > -b$, то $-a-b < c-a < 0 \Rightarrow$ $c-a$ не может быть кратно $a+b$ – противоречие $\Rightarrow$ у $a+b$ не меньше 3 нат. делителей

Пример на 3 нат. делителя: $a=15$, $b=10$, $c=5$ $k=\frac{15\cdot 10+5^2}{15+10} = 7$, $k<a\ (7<15)$, $k<b\ (7<10)$, $a+b=25$, у него 3 нат. делителя: 1, 5, 25

Ответ: 3 нат. делителя

Задача №4.



1. Проведём AC и AD, отметим $D' = AD \cap \omega$, проведём касательную к ω и Ω в точке A и отметим на ней точки K и L, как на рисунке.

2. KL - касательная к $\omega \Rightarrow \angle DAL = \angle D'BA$, KL - касательная к $\Omega \Rightarrow \angle DAL = \angle DCA = \angle D'BA$

3. DC - касательная к $\omega \Rightarrow \angle BD'A = \angle CBA$

4. Проведём OM, OB, CD - касательная к ω, O - центр $\omega \Rightarrow \angle OBD = 90^\circ$, M - сер. хорды ω, O - центр $\omega \Rightarrow \angle OMB = 90^\circ$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 7

М2-9-22
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	6	7	7	0	27

Задача №6

Заметим, что все цифры не в разрядах единиц этих чисел не могут оказаться нечётными, т.к. если у a и b в разряде единиц нечётные, то у c окажется чётная ~~из за того, что переход в разряд един~~ Следовательно нечётных цифр не больше 29

Пример на 29 нечётных цифр: $a = b = 3555555557$, $c = 7111111114$

$$
\begin{array}{r}
3555555557 \\
+\ 3555555557 \\
\hline
7111111114
\end{array}
$$

Ответ: 29 цифр

Задача №7

Разобьём все числа в таблице на 3 части-цепочки. Цепочки - последовательности клеток, в которых каждые 2 соседние граничат по стороне. Цепочки будут следующими 1, 4, 7 ... 79; 2, 5, 8 ... 80; 3, 6, 9 ... 81, мы смогли так разбить исходя из условия задачи. По принципу Дирихле т.к. угловых клеток 4, а цепочек 3, то хотя бы в одной цепочке окажется хотя бы 2 угловые клетки. Рассмотрим любые 2 угловых клетки в одной цепочке. Пусть в них стоят числа a и b. Без ограничения общности можно считать, что $a < b$. Докажем, что $b - a \vdots 6$ или, что $b = a + 6k$, для какого-то $k \in \mathbb{N}$

Возможно 2 принципиально разных случая:

I. а и в стоят в соседних по стороне угловых клетках. Без ограничения общности можно считать, что они стоят в верхних угловых клетках, т.к. можно повернуть таблицу и ничего не изменится. Т.к. $a < b$, то существует путь по иной цепочке от а до в. Без ограничения общности можно считать, что а стоит левее в, т.к. можно перевернуть таблицу и ничего не изменится. Будем „шагать" по пути от а до в. Шагом назовём переход из клетки в следующую за ней в цепочке а и в. С каждым шагом число в клетке, в которой мы находимся увеличивается на 3, если мы докажем, что от а до в шагать чётное число шагов, то мы к а чётное кол-во раз прибавим 3 и получим в, это будет означать, что $b-a \vdots 6$. Путь мы сделали n шагов вправо и m шагов вниз, тогда мы сделали $n-8$ шагов влево и m шагов вверх, т.к. в итоге должны были передвинуться вправо на 8 клеток и вверх на 0 клеток => всего мы сделали $2n+2m-8$ шагов - чётное число
чтд

II а и в стоят в противоположных угловых клетках. Без ограничения общности можно считать, что а стоит в верхней левой, а в в нижней правой, т.к. таблицу можно повернуть и/или перевернуть. Аналогично определим „шагание" из а в в. Путь мы сделали k шагов вправо и l шагов вниз, тогда мы сделали $k-8$ шагов влево и $l-8$ шагов ~~вниз~~ вверх т.к. в итоге должны были сдвинуться на 8 вправо и 8 вниз => всего мы сделали $2k+2l-16$ шагов - чётное число
чтд

Ответ: верно

Задача №9

Обозначим буквы в алфавите за $L_1, L_2 \ldots L_n$. Докажем, что в хорошем слове не больше чем $3n-1$ буква. Докажем от противного, предположим в хорошем слове хотя бы $3n$ букв. Заметим, что если выкинуть ~~какое~~ несколько последних букв, то ~~это~~ полученное слово будет хорошим, т.к. в противном случае начальное тоже было плохим, выкинем столько букв, чтоб их осталось $3n$. Обозначим буквы в слове $a_1 a_2 \ldots a_{3n}$. Рассмотрим первую повторившуюся букву в слове, пусть это a_i, разобьём слово на две части с a_1 по a_{i+1} включительно и с a_{i+2} по a_{3n} включительно. Пусть на месте a_i стоит буква L_j, а на месте a_{i+1} стоит буква L_k. Заметим,

$$\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_i a_{i+1}}_{\le n+2 \text{ буква}} \underbrace{a_{i+2} \ldots a_{3n}}$$

что $i \le n+1$, т.к. если $i > n+1$, то среди первых $i-1 > n$ ~~чисел най~~ букв найдётся 2 одинаковых по принципу Дирихле чего быть не может, т.к. a_i — первая повторившаяся. Заметим, что $L_j \ne L_k$, т.к. они стоят подряд. Рассмотрим вторую часть. Заметим, что в ней не может быть L_k, т.к. тогда можно оставить 2 L_j из первой части, L_k оттуда же и L_k из 2 части и получится последовательность $L_j L_j L_k L_k$. Также во 2 части не может быть повторяющихся букв кроме L_j, т.к. если там есть две L_t, то можно оставить их и 2 L_j из 1 части и получится $L_j L_j L_t L_t$. Т.к. в 1 части не больше $n+2$ буквы, то во второй хотя бы $2n-2$, ~~из которых кроме~~ Т.к. во 2 части нет повторяющихся кроме L_j и нет L_k, то там не больше чем $n-2$ буквы, не считая L_j-ые $\Rightarrow$ L_j-ых хотя бы n, что невозможно, т.к. по принципу Дирихле найдутся 2 рядом стоящие. Получим противоречие => наше предположение неверно => в хорошем слове не больше чем $3n-1$ буква.

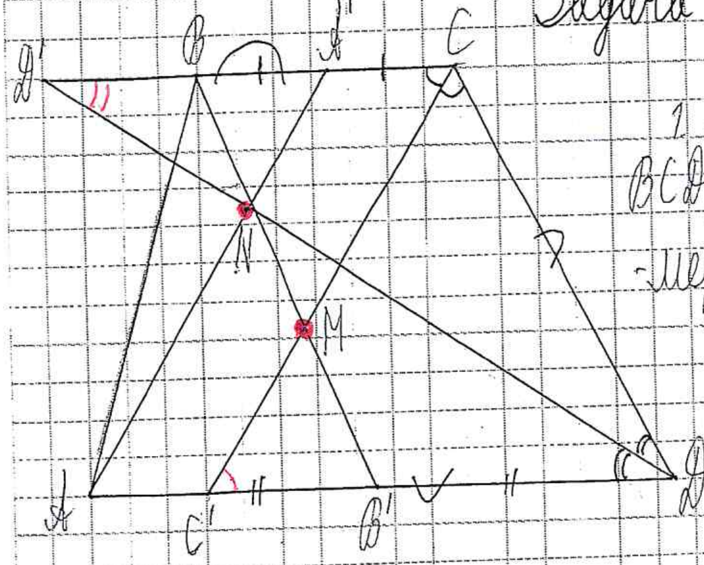
Пример на $3n-1$ букву: $\underbrace{a_1a_2\ldots a_n a_1 a_2}_{n+1 \text{ буква}}\underbrace{a_1a_3\ldots a_{n-1}a_1a_na_1}_{2n-2 \text{ буквы}}$.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 7

М2-9-22
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача № 8



1. Пусть CC', DD' - биссектрисы углов BCD, ADC; AA' - медиана △ ABC, BB' - медиана △ ABD, M = BB' ∩ CC', N = AA' ∩ DD'

2. CC' - биссектриса ⇒ ∠BCC' = ∠DCC' = ∠CC'D ⇒ CD = C'D +, аналогично, т.к. DD' - биссектр. CD' = CD +

3. BB' - медиана △ ABD ⇒ $B'D = \frac{1}{2} AD$, аналогично $A'C = \frac{1}{2} BC$ +

4. △ C'MB' ~ △ CMB т.к. AD ∥ BC, (по углам, т.к. M - точка пересечения биссектрисы CC' и медианы BB', то M - точка пересечения медиан △ ABD ⇒ ⇒ BM : MB' = 2 : 1) ⇒ BC : C'B' = 2 : 1 ⇒ $BC = 2C'B' = 2(DC' - B'D) = 2(CD - \frac{AD}{2}) = 2CD - AD$, итак BC = 2CD - AD ⇒ AD = 2CD - BC

5. Аналогично △ A'ND' ~ △ AND, $AD = 2CD - BC = 2(D'C - \frac{BC}{2}) = 2A'D'$ ⇒ ⇒ △ подобны с коэф. 2 ⇒ AN : NA' = 2 : 1 ⇒ N - точка делящая медиану △ ABC в отношении 2 к 1, считая от вершины, ⇒ N - точка пересечения медиан △ ABC и по построению лежит на ~~CC'~~ DD' - бис. ∠ ADC чтд

Задача №9

~~Пример на 2n+1~~. Обозначим буквы $a_1, a_2, \ldots a_n$.

не понял пример как строится

Пример на 2n+1: $a_1 a_2 \ldots a_n a_1 \ldots a_n a_1$. Докажем, что слово хорошее. ~~Если мы хот~~ Оставить 4 буквы включающие a_1 не выйдет т.к. 2 крайних a_1 оставлять бессмысленно, а до и после средней a_1 нет повторяющихся букв. Оставить 4 буквы без a_1 также не получится т.к. если мы хотим оставить a_y и a_z, то если мы оставим обе a_y то одна из всего 2 a_z окажется между ними и ничего не выйдет.

$a_y \ldots a_z \ldots a_y$.

Оценка на 2n+1: Заметим, что если в слове есть хотя бы 2 буквы каждой из которых хотя бы по 3, то оно нехорошее. Рассмотрим все их расположения отн. друг друга, не смотря на остальные буквы (обозначив эти буквы за а и в): аааввв; аававв; аавваа; ааввва, аваавв;ававав; ававвa, ~~авваав, аввава~~; аввваав; аввава; аввваа. Остальные ~~остальные~~ 10 идентичны с точностью до смены их местами. В каждой из них можно оставить либо аавв, либо ввaa. почему?

Докажем, что не может быть хороших слов из больше чем из 2n+1 буквы. Докажем от противного.

Предположим в хорошем слове хотя бы 2n+2 буквы, заметим что если вычеркнуть несколько букв так, чтобы осталось 2n+2, то слово останется хорошим. По доказанной ранее лемме в нём нет 2 разных букв каждой из которых хотя бы по 3. Рассмотрим букву с наибольшим кол-вом повторений в этом слове, пусть это ~~А~~ С и она

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 7 ИЗ 7

М2-9-22
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

встречается k раз, остальных букв не больше чем по 2 каждой.
Рассмотрим расположение букв c относительно друг друга. Остальные буквы слова кроме c назовем

c_1 c_2 c_3 ... c_{k-1} c_k повторяющимися если их две и неповторяющейся если она одна. Заметим, что в каждом промежутке между соседними буквами c должна стоять хотя бы одна буква, т.к. c не могут стоять подряд. Пронумеруем буквы c с 1 по k-ую. Заметим, что в промежутках c_2c_3, c_3c_4, ..., $c_{k-2}c_{k-1}$ не могут стоять повторяющиеся буквы. Докажем от противного пусть t - повторяющаяся буква стоит в таком промежутке. Заметим, что тогда и справа и слева от неё хотя бы 2 буквы c. тогда если вторая t стоит левее первой, то можно оставить $ttcc$, а если правее, то можно оставить $cctt$ - противоречие. Следовательно неповторяющихся букв хотя бы, столько же сколько промежутков c_2c_3, ..., $c_{k-2}c_{k-1}$ а их $k-3$.
Оценим сверху кол-во букв в нашем слове. Заметим, что чем больше неповторяющихся, тем меньше букв в самом слове $\Rightarrow$ макс. кол-во букв в слове достигается при минимальном кол-ве неповторяющихся. Пусть в нашем слове m различных букв, тогда неповторяющихся не меньше чем $k-3$, повторяющихся $(m-(k-3)-1)$ и буква c встречается k раз. Всего букв получается $k+k-3+2(m-k+2)=2m+1$ что меньше чем $2n+2$, т.к. $m \leq n$ - противоречие $\Rightarrow$ наше предположение неверно и в хорошем слове не больше чем $2n+1$ буквы.