Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 5

М1-9-23
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	6	27

№9.1)

Ответ: нет

Пример: пусть палочки имеют длины 200, 202, 403, 405, 602, 606. Тогда первый раз он мог составить два треуг. из палочек с длинами 200, 403, 602 ($200+403>602$) и с длинами 202, 405, 606 ($202+405>606$). Но при этом он не может составить треугольник из палочек 200, 202, 403 ($200+202<403$)

№9.2)

Ответ: знак +

Д-во: докажем, что ~~$xy>0$~~. xy не может быть ~~не~~ меньше нуля (нулю xy не может быть равно, так как $x,y\neq 0$ по условию). Пусть $xy<0$, тогда одно из чисел отриц. (пусть это x), а другое - положительно. Заменим x на $-z$ и будем считать, что $z,y>0$. Тогда ~~их~~ нер-во принимает вид $z^2+z>y^2$, $y^2-y>z^2$. Заметим, что тогда $z^2+z-y>y^2-y>z^2$, то есть $z-y>0$, а $z>y$. Но тогда $z^2>y^2>y^2-y$, противоречие. Значит xy всегда больше нуля.

Пример: $x=y=-1$. Тогда $x^2-x=2^{a}y^2=1$; ~~a~~
$y^2-y>=2^{a}$ ~~$\cdot a$~~ $x^2=1$

№ 9.3)

$a+b \geq 2$, поэтому у числа $a+b$ не меньше 2 нат. делителей. Пусть у $a+b$ 2 нат. делителя, значит $a+b=p$, где p — простое число.

Пусть без ограничения общности $a \leq b$.

~~Тогд~~ При этом $\frac{ab+c^2}{a+b} < a$, то есть $ab+c^2 < a^2+ab$, из чего следует, что $b \geq a > c$. Тогда заметим, что $\cancel{ab+c^2}$ $ab+b^2 \vdots (a+b)$ и $ab+c^2 \vdots (a+b)$, значит $b^2-c^2=(b-c)(b+c) \vdots a+b$; $a+b$ — простое, значит либо $b-c \vdots a+b$, либо $b+c \vdots a+b$, но $a+b > b-c > 0$, а $a+b > b+c > 0$, то есть ни $b-c$, ни $b+c$ не может делиться на $a+b$, противоречие. Значит делителей хотя бы 3.

+

Пример на 3 делителя:

$a=10$, $b=15$, $c=5$. Тогда $a+b=25$; $ab+c^2 = 150+25 \vdots 25$ и

~~на~~ при этом $\frac{ab+c^2}{25} = \frac{175}{25} = 7$, а $7 < 10 < 15$.

У числа 25 3 нат. делителя — 1, 5 и 25

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 5

М1-9-23
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 9.5)
Ответ: Петя (играем за него)
Покажем выигрышную для нас стратегию.
В начале раскрасим главную диагональ

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 4 ИЗ 5

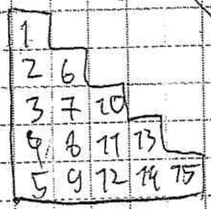
М1-9-23
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

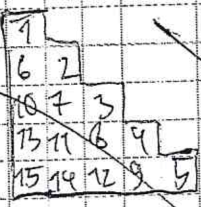
9.5) (лист 1)

Ответ: Петя

Покажем выигрышную стратегию за Петю.

1-м ходом вырежем центральную диагональ. Теперь Вася в свой ход сможет вырезать только клетки в одной из 2-х одинаковых ~~трёх~~ фигурок в виде ступенек, на которые распадётся доска. Рассмотрим ~~один из~~ одну из этих фигурок. Пронумеруем в ней клетки числами от 1 до 50·99 таким образом: в столбце, в котором 99 клеток пронумеруем их сверху вниз числами от 1 до 99; в следующем столбце, где 98 клеток пронумеруем их сверху вниз числами от 100 до 197 и т.д. (как на рисунке 1). Рассмотрим теперь вторую фигуру. Пронумеруем в ней клетки таким образом: в диагонали, в которой 99 клеток пронумеруем их числами от 1 до 99 по порядку; клетки в след. диагонали пронумеруем числами от ~~1 д~~ 100 до 197 и т.д. (как на рис. 2). Теперь будем повторять за Васей (если он вырежет столбец в одной из фигурок, то вырежем в другой те клетки, чьи номера совпадают с номерами клеток вырезанных

1


2


почему можно пронумеровать любыми номерами?

№ 9.5) (лист 2)

Васей (заметим, что из способа нумерования вытекает, что они образуют несколько клеток, стоящих подряд на диагоналях). Пусть мы не сможем сделать ход. Тогда Вася тоже не смог бы сделать предыдущий ход, то есть мы бы уже победили (он не смог бы его сделать, потому что ~~если~~ какая-то из клеток, которые он красил была бы уже покрашена (иначе мы смогли бы покрасить по алгоритму, так как всегда перед ходом Васи в обоих фигурках будет закрашен ~~со~~ набор клеток с один. номерами))).
Значит мы победим.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 6

№2-9-23

ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
7	0	7	6	0	20

№9.6)

Ответ: 29

Оценка: из ~~последних~~ трёх последних цифр чисел a, b и c есть хотя бы 1 чётная (~~иначе~~ потому что сумма 2-х нечётных чисел будет чётным числом, то есть если последние цифры чисел a и b будут нечётны, то посл. цифра числа c будет чётна), значит нечётных цифр будет не больше 29.

Пример: $a = 1999999999 = b$ $c = 3999999998$

№9.7)

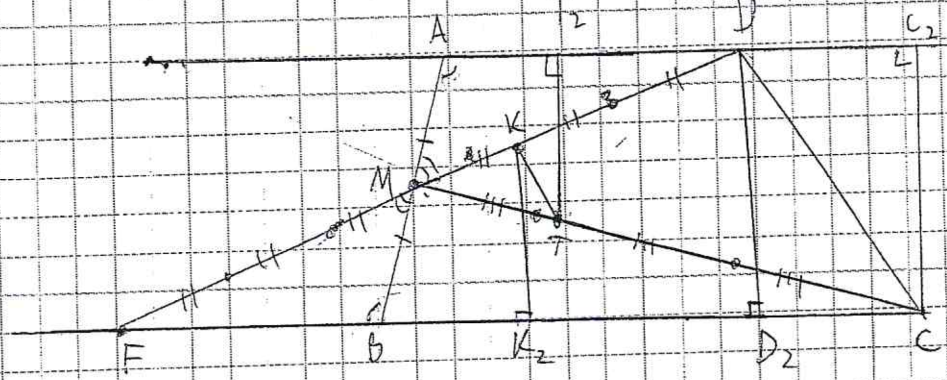
Ответ: нет

$25 - 1 = 24 \vdots 6$

Пример:

1	4	7	10	13	16	19	22	25
52	49	46	43	40	37	34	31	28
55	58	61	64	67	70	73	76	79
2	5	8	11	14	17	20	23	26
53	50	47	44	41	38	35	32	29
56	59	62	65	68	71	74	77	80
3	6	9	12	15	18	21	24	27
54	51	48	45	42	39	36	33	30
57	60	63	66	69	72	75	78	81

№ 9.8) лист 1



Заметим, что если M — середина AB, то точка пересечения медиан $\triangle ABD$ — это точка ~~на~~ K на отрезке MD такая, что $MK/KD = \frac{1}{2}$, а точка пересечения медиан $\triangle ABC$ — точка T на отрезке MC такая, что $TM/MC = \frac{1}{2}$. Заметим, ~~что~~ что $KT \parallel DC$ по теор. обратной к Фалеса, значит длина перпендикуляра из K на CD равна длине перпендикуляра из T на CD. Пусть D_2 и K_2 — это основания перпендикуляров из точек D и K на BC. Продлим DM за M до пересечения с BC. Пусть F — точка пересечения. $\triangle FBM = \triangle AMD$ по стороне ($AM = MB$) и двум углам ($\angle AMD = \angle FMB$ и $\angle MAD = \angle MBF$ как потому что $AD \parallel BC$), значит $KF = MD = 3 \cdot MK$. $KK_2 \parallel DD_2$ ($\angle KK_2D_2 = \angle DD_2K_2$), значит треугольники FKK_2 и FDD_2 подобны, причём с ~~коэфи~~ ~~но~~ коэффициентом, равным $\frac{FK}{FD} = \frac{4 \cdot MK}{6 \cdot MK} = \frac{2}{3}$, значит $KK_2 = \frac{2}{3} DD_2$. Аналогично, если T_2 и C_2 — основания перп. из T и C на AD, то $TT_2 = \frac{2}{3} CC_2$, $CC_2 = DD_2$, так как $AD \parallel BC$, значит $TT_2 = KK_2$.

№9.8) лист 2

Значит перпендикуляры из точ~~ек~~ки Т ~~и К~~ на AD и CD ~~не~~ равны перпендикулярам из точки К на ~~AD~~ BC и ~~CB~~ CD (пер. из Т на ~~AD~~ CD равен пер. из К на ~~AD~~ CD и пер. из Т на ~~CD~~ AD равен пер. из К на CB)

По условию пер. из К на CD и BC равны (К на бисс. угла ADC), значит пер. из Т на AD и CD тоже равны, значит Т лежит на биссектрисе угла ADC, ч.т.д.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 4 ИЗ 6 | М2-9-23
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№9.9) лист 1

Ответ: $2n+1$

Пример: ~~если~~ если буквы — $a_1, a_2, \dots, a_n$, то подойдет посл. $a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n a_1$

(если буква вида b — это a_k, ~~где~~ то перед первым появлением буквы a_k все буквы будут различны) ~~а если буква во~~, то есть не будет букв вида a) ?

Оценка: пусть какой-то буквы будет хотя бы 4 штуки. Пусть без огр. общности это буква z и её m штук. Тогда ~~после того~~ слово разбивается на z+1 кусок (между соседними буквами z). Пусть в первом куске x_1 букв, во втором — x_2 и т.д.

$$\underbrace{\quad\quad}_{x_1} z \underbrace{\quad\quad}_{x_2} z \underbrace{\quad\quad}_{x_3} z \dots z \underbrace{\quad\quad}_{x_{m-1}} z \underbrace{\quad\quad}_{x_m} z \underbrace{\quad\quad}_{x_{m+1}}$$

Заметим, что во всех кусках кроме 1 и 2 все буквы должны быть различны, как и во всех кусках кроме m-го и (m+1)-го. Тогда почему?

$x_1+x_2 \le (n-1)-x_3-x_4-\dots-x_{m-1}$

а $x_m+x_{m+1} \le (n-1)-x_3-x_4-\dots-x_{m-1}$, значит

$x_1+x_2+\dots+x_{m+1}+m$ (число букв в слове) $\le$

$\le (n-1)-x_3-\dots-x_{m-1}+(n-1)-x_3-\dots-x_{m-1}+x_3+\dots+x_{m-1}+m =$

$=2\cdot(n-1)-x_3-\dots-x_{m-1}+m \le 2\cdot n-2-(m-3)+m = 2\cdot n+1$

(поскольку $x_i \ge 1$, так как буквы z не стоят подряд) к 9.9) лист 4

Значит если какой-то буквы хотя бы ~~5~~ 4, то оценка доказана. Пусть каждой буквы не больше 4. Пусть есть две буквы, каждой из которой 3 (пусть это a и b). Тогда либо слева, либо справа от центральной буквы a будет ~~2~~ хотя бы 2 буквы b. Тогда найдётся слово вида aabb или bbaa из этих 2-х букв b ~~и 2-х букв~~, центральной буквы a и буквы a, которая лежит с другой стороны, противоречие.

Значит либо каждой буквы не больше 2 (тогда букв не больше $2n$) либо какой-то буквы будет 3 и тогда всего букв не больше $3+(n-1)\cdot 2 = 2n+1$.

Во всех случаях оценка доказана.

№9.10)

Давайте докажем индукцией по n, начиная с n=3, что для n различных чисел это условие не выполняется.

Пусть $n=3$, а числа — a, b, c; при этом $НОК(a,b)=x$, $НОК(a,c)=x+y$, $НОК(b,c)=x+2y$. Тогда $x \vdots a,b$, $x+y \vdots a,c$, $x+2y \vdots b,c$, значит $y \vdots a$ и при этом ~~x+2y~~ $y \vdots c$, значит $НОК(a,c) \le y$ противоречие.

Пусть мы доказали, что это не возможно для всех n от 3 до m. Пусть $n=m+1$. ~~Заменим~~,

Пусть есть $m+1$ число $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ если их общий НОД больше 1, то разделим их на него и будем доказывать для полученных чисел.

Заметим, что если для какого-то простого p на p делится (a чисел и a) хотя бы 3, ~~числа~~ (на $a \neq n$) (~~но не все~~), то из $\frac{n(n-1)}{2}$ НОК-ов будет $\frac{a(a-1)}{2}$ тех, которые делятся на p (это будут НОК-и тех чисел, которые делятся на p). При этом они тоже будут образ. неност. арифм. прогрессию (если соед. члены отличаются на k, то на p делятся каждые pk (причём $k \vdots p$, иначе либо все, либо никакие из НОК-ов делятся на p))). Значит переход по индукции возможен. ~~Пусть для любого p на p делятся 2 числа~~. Из чисел $x, x+k, x+2k, x+3k$, ($x+4k$, $x+5k$) будет хотя бы 3 чётных, значит переход будет возможен при $n \ge 4$.