1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
+ сп | ± ск | − ск | − | − |
7 | 7 сп | 0 | 0 | 0 юл | (14)

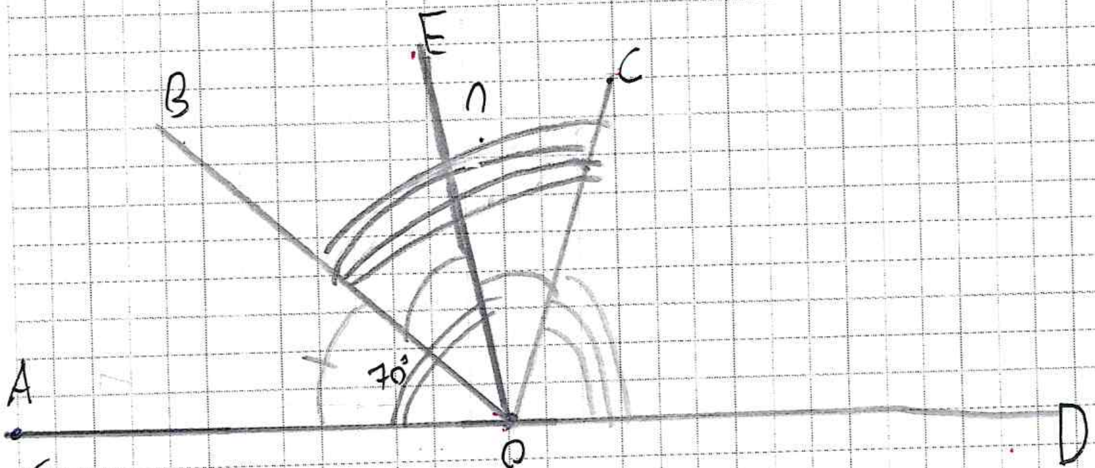
ЛИСТ 1 ИЗ 6 | М7Г−01
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача N1

Дано:
$\angle AOB$ и $\angle DOB$ - смежные
C - точка внутри $\angle DOB$
$\angle DOC = \angle AOB \cdot 2$
OE - биссектриса $\angle BOC$
$\angle AOE = 70°$

Найти:
$\angle BOC = ?$

Решение:
1) $\angle AOB + \angle DOB = 180°$ т.к. смежные
$\angle BOE = \angle EOC$ т.к. биссектриса
$\angle EOD = 180 - \angle AOE$ т.к. смеж.
$\Rightarrow \angle EOD = 180 - 70 = 110°$
2) $\angle EOD = \angle EOC + \angle COD = \angle EOC + \angle AOB \cdot 2 = BOE + \angle AOB \cdot 2$
$\angle AOE = \angle AOB + \angle BOE$
$\angle EOD - \angle AOE = 110 - 70°$
$\angle BOE + \angle AOB \cdot 2 - \angle BOE - \angle AOB = 40°$
3) $\angle AOB = 40° \Rightarrow DOC = 80° \Rightarrow BOD = 180 - 40 = 140°$
4) $\Rightarrow \angle BOC = \angle BOD - \angle DOC = 140 - 80 = \underline{60°}$



(примечание: рисунок неточен и нужен для понимания)

Ответ: $\angle BOC = 60°$

Задача №2

a – натуральное число

$a > 1000\,000$

B – остатки при делении   % – деление с остатком (здесь ввел для удобства)

$B_1 = a \% 40$ $B < 40$

$B_2 = a \% 125$ $B_1 = B_2$

раз остатки и начальное число (a) одинаковы то і число (A-B) на которое они делятся нацело =, значит: будем считать последние 3–4 цифры при их раскладе они делятся нацело.

(40)

...

040
080
120
160
200
240
280
320
360
400
440
480
520
560
600
640
680
720
760
800
840
880
920
960
1000

...

(125)

...

125
250
375
500
625
750
875
1000

...

(дальше 1000 идет повторение)

1000 → цифра 0

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 6

ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

НОК $(40, 125) = 2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5 = 125\cdot8 = 1000$

$40 = 2\cdot2\cdot5\cdot2$

$125 = 5\cdot5\cdot5$

(остаток не влияет на цифру в разряде сотен)

Почему?

Ответ: цифра 0

№3

$x^2 - x > y^2$ $\qquad a^2 = \oplus$ всегда

$y^2 - y > x^2$

если $x = \ominus$

то $y = \oplus$ или $\ominus$

если $y = \oplus$ $\qquad$ если $y = \ominus$

$y^2 > x^2$ $\qquad$ $y^2 \,?\, x^2$ (неопределенно т.к.

А такой случай возможен?

$xy = \ominus\cdot\oplus = \ominus$ $\qquad$ и как $y^2 > x^2$ и

т.к. $\qquad$ $xy = \ominus\cdot\ominus =$ как $x^2 > y^2$ подходит) — нам нужно

$y^2 = \oplus$ всегда $\qquad = \oplus$

и $y^2 - y = \oplus - \oplus$ то

оно уменьшается , чтобы при неравенства

а 100% что $y^2 > x^2$ значениях x и y работало

(аналогично и др.)

А это возможно?

если $x = \oplus$

то $y = \oplus$ или $\ominus$

если $y = \oplus$ $\qquad$ если $y = \ominus$

И что?

то $y^2 - y = \oplus - \oplus$ $\qquad$ то $x^2 > y^2$ А такое невозможно!

$x^2 - x = \oplus - \oplus$ $\qquad$ $xy = \oplus\cdot\ominus = \ominus$

а т.к. y и x разные число, то это невозможно

=> все варианты умножения xy:

$\ominus \cdot \oplus = \ominus$ $\quad \oplus \cdot \ominus = \ominus$

$\ominus \cdot \ominus = \oplus$

Не доказано

~~Ответ: + либо − имеет xy~~

№4

x – число мальчиков

y – число девочек

$x + y = 79$

т.к. 79 = н.

значит: x или y нечетное кол-во.

применим четности:

ч. + ч. = ч.	ч. · ч. = ч
ч. + н. = н.	ч. · н. = ч
н. + н. = ч.	н. · н. = н.

рассмотрим несколько конструкций – вариантов:

ч. и н.: $x = 3$ $y = 4$ работает только если все девочки знакомы со всеми мальчиками (а это не очень хорошо ?

ч. и ч.: $x = 2$ $y = 8$ работает при многих вариантах

н и н: $x = 3$ $y = 6$ работает ? при многих вариантах

т.к. > 39 нельзя (а еще же есть девочка с девочкой знакома и мальчик с мальчиком))

Можно сказать, что ситуация возможна, если n – число знакомых у каждого учащегося

$x \cdot n \vdots y$; $y \vdots x \cdot n$

(если $x \cdot n > y$) (если $x \cdot n < y$)

если $x = ч.$ $y = н.$ => не будет и наоборот; если $x \cdot n = н.$ что невозможно почему?

если $x = н.$ $y = ч.$ => будет: если $x \cdot n = ч.$ => $n = ч.$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 5 ИЗ 6 | ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$\Rightarrow$ и это значит что работает если $x=y$ (в этой ситуации)

дальше, чтобы небыло значений >39 нужно подобрать $y \approx x$

например:

$x=40 \quad y=39$

, но тут видно что выше описанный способ не заработает, т.к.

$x>39$, а дальше $\downarrow\uparrow x=40 \quad y=39 \uparrow\downarrow$

все равно не будет $\Rightarrow$ невозможно

Ответ: нет.

№5

x - монеты сверху орлами

y - монеты сверху решкой $\qquad \frac{y}{x}_{\text{половинная}} \geq k$ (если более нельзя)

$x+y=150$ Почему?

раз независимо от действий Васи у Пети всегда $y \geq x$,

а значит мы ищем когда y можно сделать наименьшее кол-во.

Вася делает так, что y наименьшее $\Rightarrow$ сначала он раскладывает монеты у нём, что y конец. было наименьшее. $\Rightarrow$ нужно найти конструкцию разложение x и y чтобы получилось.

Можно разместить наименьшее y кол-во, чтобы Петя не получил не переворачивая y не прибавляя. можно такие конструкции:
О-орел Р-решка

1) $\underbrace{\text{ОР}}$ОРОРОР... / 2) $\underbrace{\text{ОРО}}$ОРО ... (и подобные)

малые типа:

OPOOOPOOOP ... – нельзя т.к. y будет расти.

↓

OPP

1) работает, так хоть как Петя покажет, все равно $y = y_{\text{конеч.}}$ (y_1)

2) не работает т.к. хоть и y конец. $= 50$, но если Петя покажет;

OPOOPO...

по своей придется сделать

POO
или
OOP

и получиться

OPOPOOOPO... или OPOPOOOPO...

OPP OPP

а поэтому способом y минимальное будет $> y_1$

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 150 = 75 \text{ монет}$$

$K = 75$ монет.

Ответ: $K = 75$ монет.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 5	МИ − 7 − 18 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача №6 Могут быть хитрецы

Допустим, что в комнате все правдивые, когда все сказали правду, но эти сказали, что остальные лжецы => противоречие => так нельзя!

Допустим, что 3 человека в комнате правдивые, когда 1 лжец сказал ложь, это оказалось ложью, а 3 правдивые, когда сказали фразу, солгали => противоречие => так нельзя!

Допустим, что в комнате половина правдивые, остальные лжецы, когда лжец сказал фразу он солгал, а правдивый сказав фразу солгал => противоречие => так нельзя!

Допустим, что в комнате все лжецы => когда эти сказали фразу, то они сказали правду => противоречие => так нельзя! +

Допустим, что в комнате 1 правдивый, а остальные лжецы => когда сказал правдивый, то он сказал правду, а лжецы сказав фразу сказали неправду => подходит.

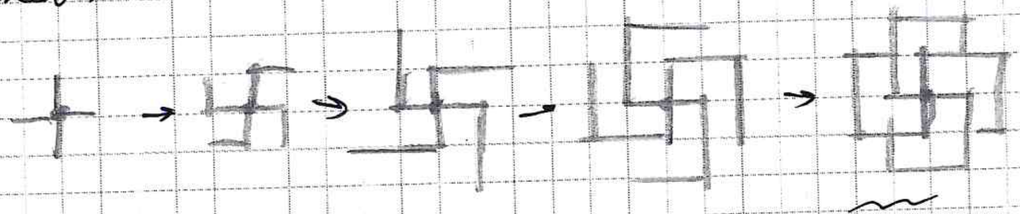
Ответ: 3 лжеца (всегда лгут)

Задача №7

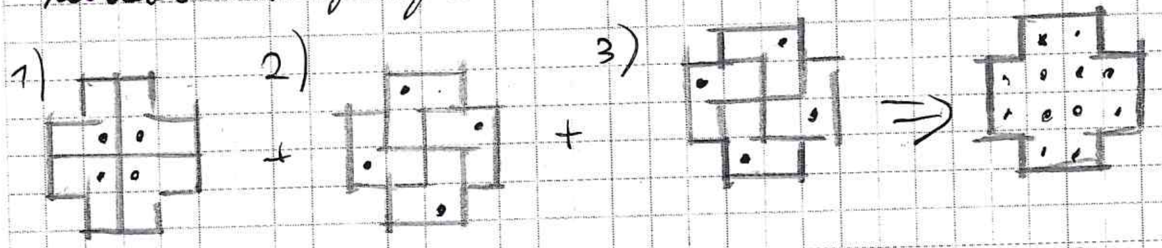
1 центральная точка.

Раз каждая клетка должна побывать "центральной", то фигура должна быть симметричной, чтобы её можно было подвинуть несколькими способами и эта должна быть без дополнительных выступов.

Попробуем нарисовать симметричную фигуру, "слепленной" из уголков:



Проверим, можно ли её разделить 3-мя способами и все ли кл. побывают "центральными".



для симметрии нужен и строчный способ от обу-полки, но — были 3·4 = 12 кл.

— фигура существует.

Ответ: существует.

Задача №10

раз в таблице должно быть 1 везде => чтобы это получить, нужно чтобы везде были одинаковые числа и поделить на само себя. (не рассматриваю вариант, когда изначально 1 везде, т.к. нам делать ничего и не нужно).

(2) Если везде одинаковые числа > 1 => по кресту делить на самого (все по столбцам/строкам) себя (не очень, т.к. таких вариантов мало).

(3) Если в каждой строке/столбце одинаковые числа, то прибавлять

к каждой строке / столбцу +1 до тех пор, когда везде будет одинаковое ~~число~~ число чтобы поделить на самого себя (2).

Если по порядку будут писать по возрастанию (убыванию) числа из строки в строку / столбцы в столбцы то +1 к столбцам / строкам тем последовательности не будут равны. дальше (3) и потом (2).

Если числа частично расставлены (равные и разные), то неважно, сколько не прибавляй, все равно останутся числа ≠ остальным.

пример:

$$\cancel{\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}} \quad \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 4\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}6 & 6\\ 6 & 4\end{vmatrix} \ldots$$

Ответ: можно при некоторых вариантах, а в общем обычно нельзя.

Задача №8 (для удобства на след. странице)

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

МII-7-18

ЛИСТ 4 ИЗ 5

ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Дано:
M – сер. AC
ΔABC – равностор.
P и R на AM и BC
$AP = BR$

Найти:
$\angle ARM + \angle PBM + \angle BMR = ?$

Решение:

1) раз ΔABC – равносторонний $\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C$ и учитывая, что сумма $\angle$ тр. $= 180^\circ \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

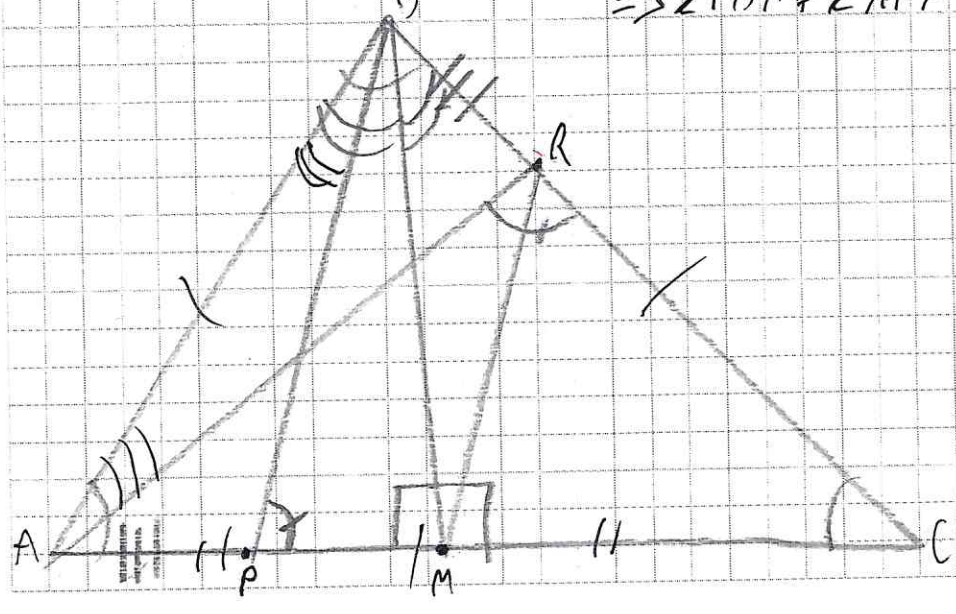
2) раз $\angle A = \angle C$ то по теореме ΔABC типо равнобедр. $\Rightarrow$ BM – медиана, бис., высота.

3) $\Delta APB = \Delta BAP$ по 2 сторонам и углу между ними ($BR = AP$; $\angle A = \angle B$; AB – общ.)

4) $\Rightarrow \angle BRA = \angle APB$ как соот. эл. равных Δ и $\angle ABP = \angle BAR \Rightarrow \angle BRA$ смеж. с $\angle ARC$; $\angle APB$ смеж. с $\angle BPM \Rightarrow \angle ARC = \angle BPM$

5) раз сумма $\angle$ тр. $= 180^\circ$ то:
$\angle PBM + \angle BPM + \angle BMP = \angle RAC + \angle ARC + \angle C$
$\angle BMP = 90^\circ$ т.к. BM – выс.; $\angle C = 60^\circ$ т.к. Δ равносторонний.
$\angle BPM = \angle ARC$ из 4. $\Rightarrow \angle RAC = \angle PBM + 30^\circ$

6) рассмотрим ΔRAM, его сумма углов:
$\angle RAC + \angle ARM + \angle(90^\circ + BMR) = 180^\circ \Rightarrow \angle PBM + 30^\circ + \angle ARM + 90^\circ + \angle BMR = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PBM + \angle APM + \angle BMR = \underline{60^\circ}$



Ответ: 60°

ЛИСТ 5 ИЗ 5	МИ – 7 – 18 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задание № 9

$n \in N$

$n > 2$

$n! + n^3 + 1$ – простое

~~[illegible]~~ $n^2 + 2$ = простое + простое ← надо доказать

$n!$ = составное (т.к. $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (n \cdot \ldots \cdot 1) \cdot 2$)

$n^3 + 1 = \left(n + \frac{1}{n^2}\right) \cdot n^2$

$n^3 + 1$ = составное

составное = (всегда) простое · простое
составное · составное
составное · простое

n^2 = простое нет !! $\vdots n$

2 = простое

$n^2 + 2$ = простое + простое — Доказано