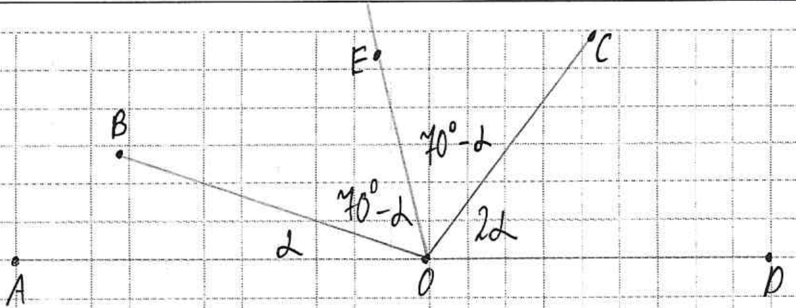
Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 3 | М7Г–09
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 1.



Пусть $\angle AOB=\alpha$. Тогда $\angle COD=2\angle AOB=2\alpha$. По условию $\angle AOE=70^\circ$, значит, $\angle BOE=\angle AOE-\angle AOB=70^\circ-\alpha$. А поскольку OE – биссектриса $\angle BOC$, то $\angle EOC=\angle BOE=$ $=70^\circ-\alpha$. Поскольку углы AOB и BOD смежные, то $\angle AOD=180^\circ$, следовательно, $\angle AOD=\angle AOB+\angle BOE+\angle EOC+\angle COD=\alpha+(70^\circ-\alpha)+(70^\circ-\alpha)+2\alpha=140^\circ+\alpha=180^\circ$, откуда $\cancel{\alpha=140^\circ}$ $\alpha=40^\circ$. А $\angle BOC=2\cdot(70^\circ-\alpha)=2\cdot(70^\circ-40^\circ)=2\cdot30^\circ=60^\circ$.

Ответ: 60°.

Задача 2. Вычтем из этого числа остаток при делении на 40. Тогда это число станет делиться на 40 и на 125, т.е. на НОК$(40,125)=1000$. Значит, в разряде сотен у получившегося числа будет цифра 0. Прибавим к этому числу остаток исходного при делении на 40. Мы прибавили к числу остаток, который меньше 40, значит, цифра в разряде сотен ~~не~~ изменилась, т.е. осталась равной 0. В ходе решения мы вычли и прибавили одно и то же число к исходному, значит, в конце осталось исходное число. А, исходя из последнего рассуждения, цифра в разряде сотен исходного числа, к которому мы пришли в ходе решения, равна 0.

Ответ: 0.

Задача 3. Сложим эти неравенства: $(x^2-x)+(y^2-y) \geq x^2+y^2 \Rightarrow -x-y \geq 0$. И x, и y не могут быть оба положительными, поскольку тогда $-x-y<0$. Если, без ограничения общности, x - отрицательное (и равно $-x_1$, при этом $x_1 \geq 0$), а y - положительное, то $-x-y = x_1 - y \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq y$. Значит, $x^2 = x_1^2 \geq y^2 \geq y^2 - y \Rightarrow x^2 \geq y^2 - y$, что противоречит условию. Если, опять же, без ограничения общности, $x=0$, то $x^2 - x = 0 \geq y^2$, но y^2 должно быть больше или равно 0, снова противоречие. Из всех этих рассуждений мы получаем, что $x<0$ и $y<0$, значит, $xy>0$.

Пример: при $x=-1$ и $y=-1$: $x^2-x = 1+1=2>1$, и $y^2-y=1+1=2>1$. А $xy = (-1)\cdot(-1)=1$, со знаком +.

Ответ: знак +.

Задача 4. Пусть мальчиков - x, а девочек - $79-x$. Поскольку 79 - простое, то НОД$(79,x)=1$, поскольку $x<79$. Тогда НОД$(79,x)=$НОД$(x, 79-x)=1$, значит, кол-ва мальчиков и девочек взаимно просты. Предположим, что все ~~девочки~~ девочки имеют поровну знакомых мальчиков (a), а мальчики - поровну знакомых девочек (b). Тогда, кол-во знакомств мальчиков с девочками (bx) равно кол-ву знакомств ~~девочек~~ девочек с мальчиками ($a\cdot(79-x)$). Без ограничения общности, $x \geq 40$ (если $x<40$, то $79-x \geq 40$, ~~не~~ мы можем поменять кол-ва мальчиков и девочек местами, получится то же самое), значит, $a(79-x)=bx$. Поскольку НОД$(x, 79-x)=1$ и $bx \vdots 79-x$, то $b \vdots 79-x$. При этом $b \leq 79-x$ (ведь знакомств мальчика с девочками не больше кол-ва девочек), значит, $b=79-x \Rightarrow a=x \Rightarrow$ $\Rightarrow a \geq 40$, значит, ~~хотя~~ у одной девочки не меньше 40 знакомых мальчиков, и не меньше 40 знакомых, что противоречит условию, значит, наше предположение неверно.

Ответ: нет, не может.

ЛИСТ 3 ИЗ 3

ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 5. Пете нужно поступать по такой тактике: если он заметит тройку монет („орёл", „орёл", „решка"), то ему нужно указать на эту тройку, и „решка" „передвинется" влево, или станет тройка из 3-х „решек". Если же Петя заметит тройку („орёл", „решка", „решка"), то он опять же на неё указывает, и „орёл" „сдвигается" вправо (если Вася поменял 2 „решки", то, опять же, „орёл" стал справа). А если таких троек не будет? Таким образом, в конце концов, все „решки" окажутся ~~справа~~ слева, а „орлы" – ~~слева~~ справа. Теперь мы можем поочерёдно брать тройки „орлов" справа, и ~~они~~ ~~будут~~ 2/3 „орлов" поменяются на решки, значит, $k = \frac{2}{3} \cdot 150 = 100$. Есть раскраска, когда 100 не получится.

Ответ: 100.

5	6	7	8	9	10	Σ
	+	$+_{си}$	$-_{си}$	$+_{нп}$	$-_{си}$	
$7_{си}$	$7_{нп}$	$0_{нп}$	7	$0_{нп}$		21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 1 | М II – 7 – 09
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

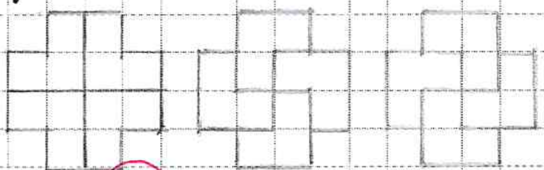
Выход из аудитории $9^{25} - 9^{31}$; $12^{16} - 12^{20}$

Задача 6. 4 человека, которые всегда лгут, не могло быть, т.к. в этом случае они бы сказали правду. 3 – могло, если 1 всегда говорит правду. Тогда он сказал правду, а остальные солгали. 2 лжеца тоже могло быть, остальные иногда говорят правду, иногда лгут (в этот раз они солгали). 1 и 0 лжецов могло быть (остальные иногда говорят правду, иногда лгут, в этот раз они солгали).

Ответ: 3, 2, 1 или 0.

Задача 7. Ответ: да.

Пример:



Задача 9. Поскольку $n>2$, то $n!+n^3+1>2 \Rightarrow n!+n^3+1 \not\vdots\, 2$ (ведь оно простое) $\Rightarrow n!+n^3 \vdots 2$. А поскольку $n! \vdots 2$ (ведь $n>2$), то $n^3 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow n \geq 4$. $n!+n^3+1 = n!+(n+1)(n^2-n+1)$. Если ~~н.~~ НОД$(n!, n+1) \neq 1$, то $(n!+n^3+1) \vdots$ НОД$(n!, n+1)$, значит, оно составное, ~~следовательно,~~ пр-ие, значит, НОД$(n!, n+1)=1$. А поскольку $n+1$ может делиться только на числа, меньшие его (а все эти числа содержатся в $n!$), то $n+1$ простое. Аналогичное рассуждение проводим для n^2-n+1. Если мы проверим все числа до $\sqrt[2]{n^2-n+1}$, (~~которые~~) делится ли на них n^2-n+1, то, если n^2-n+1 не будет делиться ни на одно из них, кроме 1, то оно простое. А $\sqrt[2]{n^2-n+1} < \sqrt[2]{n^2} = n$, и поскольку $n!+n^3+1$ и n^2-n+1 взаимно просты, то n^2-n+1 не делится ни на одно число, содержащееся в $n!$, т.е. меньшее или равное n, (а значит, и $\sqrt[2]{n^2-n+1}$) значит, оно простое. Следовательно, $n+1$ и n^2-n+1 простые, а их сумма – n^2+2, т.е. n^2+2 можно представить в виде суммы двух простых, что и требовалось доказать.