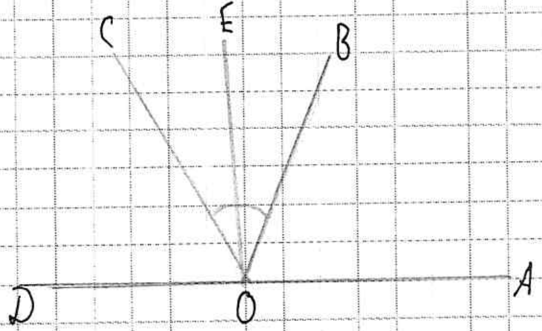
1	2	3	4	5	Σ
+	+ск	–	–ск	–	
7ск	7	0	0	0ск	14

ЛИСТ 1 ИЗ 4

М7I-11
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 1



Дано:

$\angle AOB$ и $\angle DOB$ - смежные

$\angle DOC = \angle AOB \cdot 2$

OE - биссектриса $\angle BOC$

$\angle AOE = 70^\circ$

Найти: $\angle BOC$

Решение:

Пусть x - величина угла AOB. Тогда величина угла ~~DOB~~ DOC равна $2x$

$\angle AOE = \angle AOB + \angle BOE$ (по осн. св. вел. угла)

$\angle BOE = \angle COE$ (по определ. биссектрисы) } $\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BOE$

$\angle BOE + \angle COE = \angle BOC$ (по осн. св. вел. угла)

$\angle DOB = \angle DOC + \angle BOC$ (по осн. св. вел. угла) } $\Rightarrow \angle DOC + \angle BOC + \angle AOB = 180^\circ$

$\angle DOB + \angle AOB = 180^\circ$ (по св. смеж. углов)

$2x + \cancel{\angle BO}\ 2\angle BOE + x = 180^\circ$

$\angle BOE = \frac{180^\circ - 3x}{2}$

$\angle BOE = \angle AOE - x$

$70^\circ - x = \frac{180^\circ - 3x}{2}$

$70^\circ - x = 90^\circ - 1{,}5x$

$90^\circ - 70^\circ = 1{,}5x - x$

$20 = 0{,}5x$

$x = 40^\circ$

$\angle BOC = (\angle AOE - x) \cdot 2$

$\angle BOC = (70^\circ - 40^\circ) \cdot 2$

$\angle BOC = 60^\circ$

Ответ: величина угла BOC равна 60°

Задача 2

Если число нацело делится на 40, то последними ~~тремя~~ двумя цифрами числа могут быть ~~040, 080, 120, 180, 200, 240, 280, 320, 360, ..., 000.~~ 20, 40, 60, 80, 00

Если число нацело делится на 125, то последними тремя цифрами числа могут быть 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, 000

Таким образом, если число нацело делится на 40 и на 125, то последними двумя цифрами числа являются два нуля. Если последние три цифры числа ~~р~~ образуют число 500, то само число не будет кратно 40, => последние три цифры числа ~~равны 000.~~ являются нулями.

Возьмем некоторое число, кратное 40 и 125. Тогда, последние три цифры числа являются нулями. Числа в промежутке от этого числа и до следующего числа, кратного 40 будут давать одинаковые остатки при делении на 40 и на 125, и у всех этих чисел в разряде сотен стоит 0. Все последующие числа до следующего числа, кратного 40 и 125 будут давать различные остатки при делении на 40 и на 125. У ~~ближайшего~~ следующего числа, кратного 40 и 125 в разряде сотен стоит 0, => если число даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125, то ~~его~~ в разряде сотен у этого числа стоит цифра 0

Ответ: в разряде сотен может стоять цифра 0

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 4	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 4

Какой принцип разбиения на группы?

Поскольку максимальное число школьников в одной группе знакомых меньше общего числа учеников, среди учеников ~~этой~~ общей группы есть несколько групп, в которых все девочки имеют поровну знакомых мальчиков, а все мальчики имеют поровну знакомых девочек. Если в этих небольших группах будет неравное число школьников, то получится, что некоторые из мальчиков знакомы с большим числом девочек, либо что некоторые из девочек знакомы с большим числом мальчиков. Таким образом, во всех этих небольших группах должно быть поровну мальчиков и девочек. Но 79 — это простое число, $\Rightarrow$ поровну разделить школьников на небольшие группы не получится $\Rightarrow$ не может оказаться так, что все девочки знакомы с равным количеством мальчиков, а все мальчики — с равным количеством девочек

А почему это не одна большая группа? Откуда берутся подгруппы

Задача 3

Рассмотрим случай, когда оба числа x и y положительные

Тогда $x^2 > x^2 - x$, $\Rightarrow x^2 > y^2$

$y^2 > y^2 - y$, $\Rightarrow y^2 > x^2$

В этом случае получается противоречие, т.к. $x^2 > y^2$, $y^2 > x^2$ и $x^2 \neq y^2$,
$\Rightarrow$ x и y не могут быть положительными оба

Если оба числа x и y отрицательные, то они могут удовлетворять равенствам без возникновения противоречий. Например, при $x = -1{,}75$ и $y = -1{,}5$

$$(-1{,}75)^2 - (-1{,}75) > (-1{,}5)^2 \qquad 4{,}8125 > 2{,}25$$
$$\Rightarrow$$
$$(-1{,}5)^2 - (-1{,}5) > (-1{,}75)^2 \qquad 3{,}75 > 3{,}0625$$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 4 ИЗ 4	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Произведение двух отрицательных чисел — положительное, ⇒ произведение xy может быть положительным

Не рассмотрен случай разных знаков

6	7	8	9	10	2
+	+	+	−нп	−	
7нп	7сп	7сп	0	0сп	21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 3

Ми-7-03

ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 6

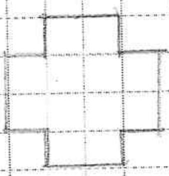
Если все четверо всегда лгут, то возникает противоречие, поскольку все из них сказали правду. +

В комнате может быть только один человек, который всегда говорит правду. Если в комнате будет несколько таких человек, то они обвинят друг друга во лжи, и возникнет противоречие. Поэтому, если в комнате есть человек, который говорит только правду, то трое из ~~тех~~ людей в комнате действительно всегда лгут.

Если допустимо, что есть такие люди, которые иногда лгут, а иногда говорят правду, и такие люди присутствуют в комнате, то людей, говорящих только правду в комнате нет, поскольку иначе получится, что человек, который говорит только правду, солгал. В зависимости от количества людей, которые иногда лгут, в комнате может находится от 0 до 3 людей, которые всегда лгут

Задача 7

Такая фигура существует



Такую фигуру можно разбить на уголки из клеток тремя способами так, чтобы каждая её клетка в одном из разбиений была центральной в своём уголке:

I сп. II сп. III сп.

Закрашенные клетки являются центральными в своих уголках

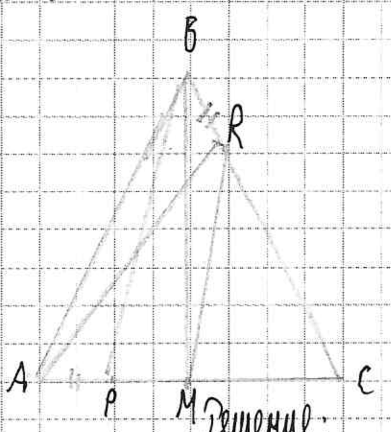
Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 3 | МИ-7-03
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача 8

Дано:
ΔABC равносторонний
$M \in AC$, $AM = CM$
$P \in AM$
$R \in BC$
$AP = BR$

Найти:
$\angle ARM + \angle PBM + \angle BMR$



Решение:

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$ (по теореме о сумме углов тр.)
$AB = BC = AC$ (по определ. равност. тр.)
$\Big\} \Rightarrow \angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60°$ (т.к. против большей стороны лежит больший угол, и все стороны равны)

$AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ равнобедренный (по определ.)
BM – медиана (по определ.)
$\Big\} \Rightarrow BM$ – высота и биссектриса (по св. равнобед. тр.)

$\Rightarrow BM \perp AC$ (по определ. высоты) $\Rightarrow \angle BMC = \angle BMA = 90°$ (по определ. перпендикулярных прямых)

Рассмотрим ΔAPB и ΔBRA:
AB – общая
$\angle BAC = \angle ABC$
$AP = BR$
$\Big\} \Rightarrow \Delta APB = \Delta BRA$ (по I признаку равенства тр.) $\Rightarrow \angle ARB = \angle BPA$ (как соотв. элем. равных тр.)

$\angle ARM = \angle ARC - \angle MRC$ (по осн. св. вел. угла)
$\angle ARC = 180° - \angle ARB$ (по св. смеж. углов)
$\Big\} \Rightarrow \angle ARM = 180° - \angle MRC - \angle ARB = 180° - \angle MRC - \angle APB$ (т.к. $\angle ARB = \angle APB$)

$\angle PBM = \angle ABC - \angle ABP - \angle MBC$ (по осн. св. вел. угла)
$\angle MBC = 0{,}5\angle ABC$ (по определ. биссектрисы)
$\Big\} \Rightarrow \angle PBM = 0{,}5\angle ABC - \angle ABP$

$\angle BMR = \angle BMC - \angle RMC$ (по осн. св. вел. угла)
$\angle BMC = 180° - \cancel{AR}\angle AMB$
$\Big\} \Rightarrow \angle BMR = 180° - \angle AMB - \angle RMC$

$\angle ARM + \angle PBM + \angle BMR = 180^\circ - \angle MRC - \angle APB + 0{,}5\angle ABC - \angle ABP + 180^\circ - \angle AMB - \angle RMC =$

$= 360^\circ + 60^\circ \cdot 0{,}5 - (\angle MRC + \angle RMC) - (\angle APB + \angle ABP) - 90^\circ = 300^\circ - (\angle MRC + \angle RMC) - (\angle APB + \angle ABP)$

$$\left.\begin{array}{l} \angle MRC + \angle RMC = 180^\circ - \angle ACB \text{ (по теореме о сумме углов тр.)} \\ \angle APB + \angle ABP = 180^\circ - \angle BAC \text{ (по теореме о сумме углов тр.)} \end{array}\right\} \Rightarrow 300^\circ - (\angle MRC + \angle RMC) - (\angle APB + \angle ABP) = 300^\circ - (180^\circ - \angle ACB) - (180^\circ - \angle BAC)$$

$300^\circ - (180^\circ - \angle ACB) - (180^\circ - \angle BAC) = 300^\circ - 180^\circ + \angle ACB - 180^\circ + \angle BAC = -60^\circ + \angle ACB + \angle BAC = -60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 60^\circ$

Ответ: сумма углов ARM, PBM и BMR равна 60°

Задача 9

Если $n! + n^3 + 1$ — простое число, и $n > 2$, то $n! + n^3 + 1$ не может быть чётным числом. В произведении $n!$ присутствует хотя бы одно чётное число ($n > 2$, а 2 - чётное) $\Rightarrow$ число $n!$ тоже чётное. Сумма чётного и нечётного чисел дает нечётное число, $\Rightarrow$ $n! + 1$ — нечётное число. Отсюда следует, что n^3 не может быть нечётным, т.к. сумма двух нечётных чисел в сумме даёт ~~неч~~ чётное число ($n! + 1$ и n^3 нечётные, а их сумма чётна), а $n! + n^3 + 1$ — нечётное число, $\Rightarrow$ n^3 чётное, $\Rightarrow$ n тоже чётное. Поскольку n — чётное, то n^2 тоже чётное, $\Rightarrow$ $n^2 + 2$ (сумма двух чётных чисел) — чётное число. Любое чётное число, большее 2 можно представить в виде суммы двух простых чисел, $\Rightarrow$ $n^2 + 2$ представляется в виде суммы двух простых чисел.