Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 2 | МВГ – 09
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

1	2	3	4	5	Σ
+ нп	+. нп	+– нп	– нп	– нп	
7	7	5 сп	0	0	19

1. Ответ: только цифра 0.

Решение:

По условию задачи $n \equiv t \pmod{40}$, $n \equiv t \pmod{125}$.

Но тогда $n-t \equiv 0 \pmod{40}$, $n-t \equiv 0 \pmod{125}$.

Отсюда имеем, что $n-t \,\vdots\, 40$, $n-t \,\vdots\, 125 \to n-t \,\vdots\, 1000$.

Так как по определению остатка $t < 40$, $n < 40 \pmod{1000}$, и в разряде сотен стоит ноль.

2. Ответ: xy всегда больше нуля.

Решение: Пример, где $xy > 0$ – это $x=-1$, $y=-1$. +

Если одно из чисел равно нулю, то $0 > k^2$, что невозможно на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Предположим, что существуют такие x и y, удовлетворяющие неравенствам, что $xy < 0$. Без ограничения общности $x > 0$, $y < 0$ (система неравенств симметрична относительно перестановки x и y).

$$\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 > x \\ x^2 - y^2 < -y \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 > x \\ x < -y \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 > x \\ x^2 < y^2 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 > x > 0 \\ x^2 - y^2 < y^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$0 = y^2 - y^2 > x^2 - y^2 > x > 0 \to$ противоречие!

3. Ответ: нет, такого быть не может.

Решение: Обозначим число девочек за d (мальчиков, очевидно, будет $79-d$), число знакомых мальчиков у каждой девочки за k, число знакомых девочек у каждого мальчика за ℓ.

Т.к. знакомства взаимны, $k \cdot d = \ell \cdot (79-d) \to \frac{k}{\ell} = \frac{79-d}{d}$.

$79-d$ и d не могут быть одновременно меньше или равны 40, поэтому дробь $\frac{79-d}{d}$ должна быть сократимой. 39? 39 и 40

НОД$(79-d; d) = x$, где $x > 1 \to 79-d \,\vdots\, x$, $d \,\vdots\, x \to 79 \,\vdots\, x$, что невозможно, потому что 79 – простое число.

Всероссийская олимпиада школьников
Регинальный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 2	М8I-09 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

–

4. Ответ: при $k = 90$

Решение:

Пример: разобъём все монеты на группы по 5 штук. Если в группе 5, 4 или 3 решек, оставим её. Если там 1 решка, то (если надо) сдвинем её из центра и перевернём 2 из 3 подряд идущих орлов. Если решек две, то будем переворачивать монеты, пока не получится три решки или не останется группа РОРОО

Последовательно идущие группы РОРОО позволяют получить шесть решек на десять монет:

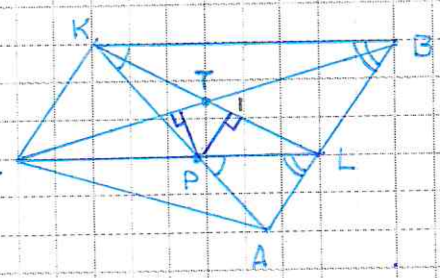
Р О Р О О Р О [Р О О] 4/10
Р О Р О О [Р О О] ... 4/10
Р О Р [О О О] 4/10
Р О Р Р О Р 6/10

Оценка: пусть Вася выложил ряд ОРРОРР...ОРР. Первым ходом он перевернёт две решки, вторым – двух орлов, далее он может бесконечно долго „перемещать" орлов так, чтобы три орла не оказались рядом. Петя не сможет соединить трёх орлов, так как Вася может не двигать решку в комбинации ОРОО на крайние места.

5. Доказательство:

$CL \parallel BK \rightarrow \triangle APL \sim \triangle AKB$

$\angle KPC = \angle APL$, $\angle PKC = \angle PAL \rightarrow \triangle APL \sim \triangle KPC$



$\triangle APL \sim \triangle KPC \rightarrow \dfrac{KP}{CP} = \dfrac{PA}{PL}$

Если угол $\angle KCP$ тупой, то $KP > CP$,

$PA > PL \rightarrow KA > CL$.

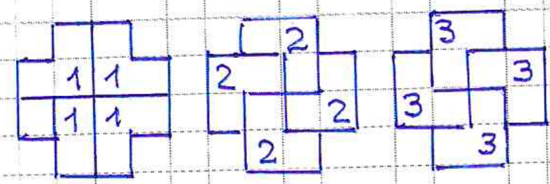
$\triangle TPH_c =$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 2 М2 - 8 - 26
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

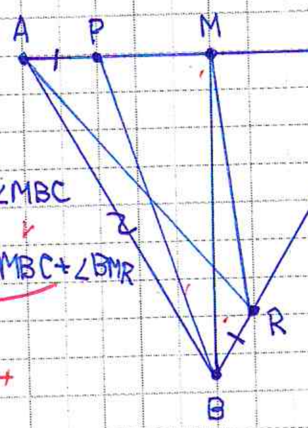
6. Ответ: да, такая фигура существует.

Пример: соединим четыре уголка так, чтобы центральные клетки образовали квадрат.



6	7	8	9	10	Σ
+	+	+.	+	−сп	ОНИС
7 АС	7 юл	6 ИЗ	6 А.Г.	0 АК	26

7. Ответ: $\angle ARM + \angle PBM + \angle BMR = 60°$.



Решение: Обозначим искомую сумму за x.

$\angle ARM = 180° - \angle RAM - \angle AMR = 180° - \angle RAM - \angle AMB - \angle BMR$
$\angle PBM = 180° - \angle BPM - \angle PMB = 180° - \angle BAP - \angle ABP - \angle BCM - \angle MBC$

$x = \underbrace{180° - \angle RAM - \angle AMB - \angle BMR}_{ARM} + \underbrace{180° - \angle BAP - \angle ABP - \angle BCM - \angle MBC}_{PBM} + \angle BMR$

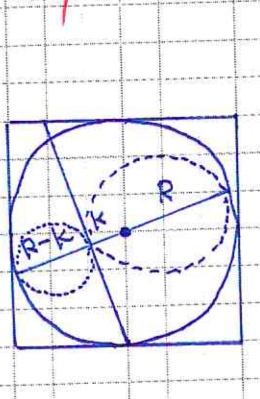
Заметим, что:
$\triangle ABC$ равносторонний $\to$ $\angle BAP = \angle BCM = 60°$; +
BM – медиана $\to$ и высота $\to$ $\angle AMB = 90°$; +
BM – медиана $\to$ и биссектриса $\to$ $\angle MBC = 30°$. +

Отсюда $x = 180° - \angle RAM - 90° + 180° - 60° - \angle ABP - 60° - 30° = 120° - \angle RAM - \angle ABP$.

Так как $AP = BR$, $\triangle ABP = \triangle ABR$ по двум сторонам и углу между ними, и $\angle ABP = \angle BAR$. Тогда $x = 120° - \angle RAM - \angle BAR = 60°$.

+

8. Построим круг радиусом 1 в исходном квадрате.



При каждом разрезе построим вместо каждого разбитого круга оба меньших. Пусть разбитый круг имел радиус R, а линия разреза прошла на расстоянии k от центра. Построим в ~~меньшей~~ одной части круг диаметром $R-k$, а в другой $R+k$. Тогда сумма радиусов не будет меняться: $R \to \frac{R-k}{2} + \frac{R+k}{2} = R$.

Так как каждый разбитый круг был единственным в своей части, после разреза частей с двумя кругами образоваться не может.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 2 | М2 - 8 - 26
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Если некоторая часть осталась пустой, построим в ней круг любого радиуса, он на решение задачи не влияет. ?

Каждый новый круг будет размещён внутри части, т.к. он целиком помещается в исходный круг и касается линии разреза в одной точке, т.е. лежит по одну сторону от неё. ?

9. Доказательство:

По формуле сокращённого умножения $n^3+1 = (n)^3+(1)^3 = (n+1)(n^2-n+1)$.

Так как $n!+n^3+1$ – простое, $n!+n^3+1$ не делится на $n+1$ и n^2-n+1.

Отсюда следует, что оба эти числа простые (иначе НОД$(n!, k) > 1$, и НОД$(n!+n^3+1, k) > 1$, где k – составное число из $\{n+1;\ n^2-n+1\}$). (т.к. меньший делитель n^2-n+1 или $n+1$ был бы $\leq n \rightarrow$ входил бы в $n!$). +

Тогда $n^2+2 = (n^2-n+1)+(n+1)$. Почему?

10. Ответ: да, можно.

Решение:

Достаточно некоторое число раз повторить процедуру: каждую строку делить пополам, добавляя единицу к столбцам с нечётными числами. Если вся таблица заполнена единицами, можно остановиться.

у нас могут нарушиться условия в других клетках столбца

За один проход будет добавлено не ~~менее~~ более 2021·2021 единиц и уменьшено 2021·2021 чисел, т.е. сумма в таблице уменьшится либо останется прежней. При этом, если 2021^2 чисел были уменьшены на единицу, то после этого уменьшения все они равны 1. Иначе сумма чисел в таблице уменьшится, а так как процедура оставляет все числа натуральными, то они будут стремиться к единице.