Задачи муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике в 2013/2014 учебном году для учащихся 9-11 –х классов г. Пермь

ВНИМАНИЕ! Задачи могут быть решены и другими способами.

Задача 1

Вес: 20 баллов

Как-то раз Гордон Шамуэй заявился на выставку кошек, желая продать большую партию котят только что выведенной им породы «вислоухая упитанная». Как оказалось, функция спроса на котят этой породы имеет вид: $Q = a - P$ (здесь a – некая постоянная величина), а Гордон Шамуэй является единственным продавцом. Организаторы выставки сказали ему, что продавать котят можно лишь при условии уплаты специального сбора, из которого финансируется приют для бездомных кошек. За первого проданного котенка Гордон должен уплатить сбор в размере 1 рубля, за второго – 2 рубля, за третьего – 3 рубля и так далее (т.е. сбор уплачивается за каждого проданного котенка). В этом случае максимальная прибыль (выручка за вычетом сбора), которую Гордон может получить на выставке, продавая котят всем желающим по одной и той же цене, составит 1350 рублей.

На это Гордон Шамуэй ответил, что деньги его не интересуют, и продал такое количество котят и по такой цене, чтобы получить нулевую прибыль. Сколько котят продал на выставке Гордон Шамуэй?

Решение

Прибыль Гордона: $\pi = PQ - (1 + 2 + 3 + \ldots + Q) = (a - Q)Q - \frac{1+Q}{2}Q =$
$= -1{,}5Q^2 + (a - 0{,}5)Q$.

Максимум прибыли достигается при условии: $Q = -\frac{a-0{,}5}{-3} = \frac{a-0{,}5}{3}$.

Максимальная прибыль $\pi_{max} = -1{,}5Q^2 + (a - 0{,}5)Q = Q(-1{,}5Q + a - 0{,}5) =$
$= \frac{a-0{,}5}{3} \times \left(-1{,}5\times\frac{a-0{,}5}{3} + a - 0{,}5\right) = \frac{0{,}5}{3} \times (a - 0{,}5)^2 = 1350.$ $(a - 0{,}5)^2 = 8100.$
$a - 0{,}5 = 90.$ $a = 90{,}5.$

Как мы знаем, прибыль Гордона была равна нулю: $\pi = -1{,}5Q^2 + (a - 0{,}5)Q =$
$= -1{,}5Q^2 + (90{,}5 - 0{,}5)Q = -1{,}5Q^2 + 90Q = 0.$ $Q = 60.$

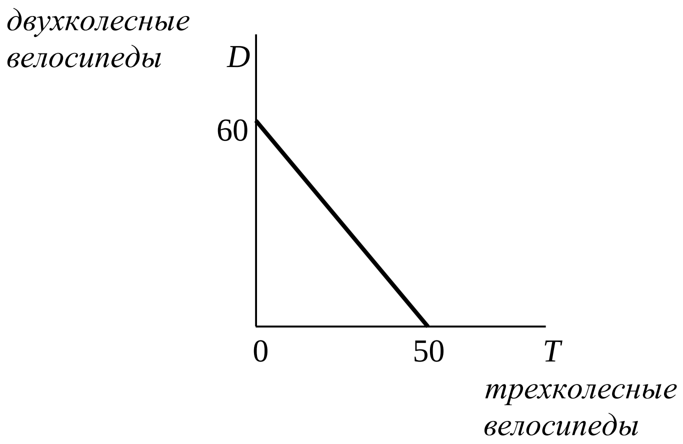
Ответ: 60 котят.

Задача 2

Вес: 20 баллов

Велосипедный завод имени Винтика и Шпунтика может производить только двухколесные и трехколесные велосипеды. Для простоты будем считать, что велосипед состоит только из рамы и нескольких колес (двух или трех). Рама является универсальной, т.е. на ней можно смонтировать и два, и три колеса. Все рамы и колеса также производятся на данном заводе (именно из них собираются все велосипеды). Объемы выпуска велосипедов того и другого вида определяются только количеством рам и колес, которые может производить завод.

Однажды на заводе сменилось начальство. Вновь назначенный директор попросил показать ему КПВ завода для того, чтобы эффективно осуществлять процесс планирования. Подчиненные принесли ему следующий график:



Уравнение этой КПВ имело вид: $D = 60 - 1{,}2T$, где D – выпуск двухколесных велосипедов, T – выпуск трехколесных велосипедов.

Но директор сказал, что ему нужна совсем другая КПВ. Эта КПВ должна показывать комбинации рам и колес, которые может выпускать завод. График этой КПВ должен быть графиком функции $Y = f(X)$, где X – производство колес, Y – производство рам.

Сформулируйте уравнение той КПВ, которую хочет видеть директор.

Решение

Предположим, искомая КПВ представляет собой график линейной функции, т.е. ее уравнение имеет вид: $Y = a - bX$. Пусть X_D и Y_D – это количества колес и рам, использованных для производства двухколесных велосипедов, а X_T и Y_T – количества колес и рам, использованных для производства трехколесных. Очевидно, $X_D = 2Y_D$, $X_T = 3Y_T$. Общий выпуск колес: $X = X_T + X_D$. Общий выпуск рам: $Y = Y_T + Y_D$.

Искомое уравнение КПВ можно переписать следующим образом: $Y_T + Y_D = a - b(X_T + X_D) = a - b(3Y_T + 2Y_D)$. Отсюда $Y_D = \dfrac{a}{1+2b} - \dfrac{1+3b}{1+2b}Y_T$.

Y_D – это число рам для двухколесных велосипедов. Число этих рам равно числу двухколесных велосипедов, поэтому $Y_D = D$. Аналогично $Y_T = T$. Поэтому можно записать: $D = \dfrac{a}{1+2b} - \dfrac{1+3b}{1+2b}T$. Сравнивая это уравнение с уравнением, приведенным в условии задачи, мы легко можем заключить, что $\dfrac{a}{1+2b} = 60$ и $\dfrac{1+3b}{1+2b} = 1{,}2$. Отсюда $b = \dfrac{1}{3}$, $a = 100$. Искомое уравнение КПВ: $Y = 100 - \dfrac{X}{3}$.

Ответ. $\mathrm{Y} = 100 - \dfrac{X}{3}$.

Задача 3

<u>Вес: 25 баллов</u>

Одна старушка может ежедневно тратить на продукты 600 рублей. При этом она предпочитает покупать только два вида продуктов – ветчину по 300 рублей за килограмм и сыр по 200 рублей за килограмм. Каждый день ее выбор совершенно случаен – отправляясь в магазин, она и сама не знает, сколько ей сегодня захочется купить сыра и ветчины.

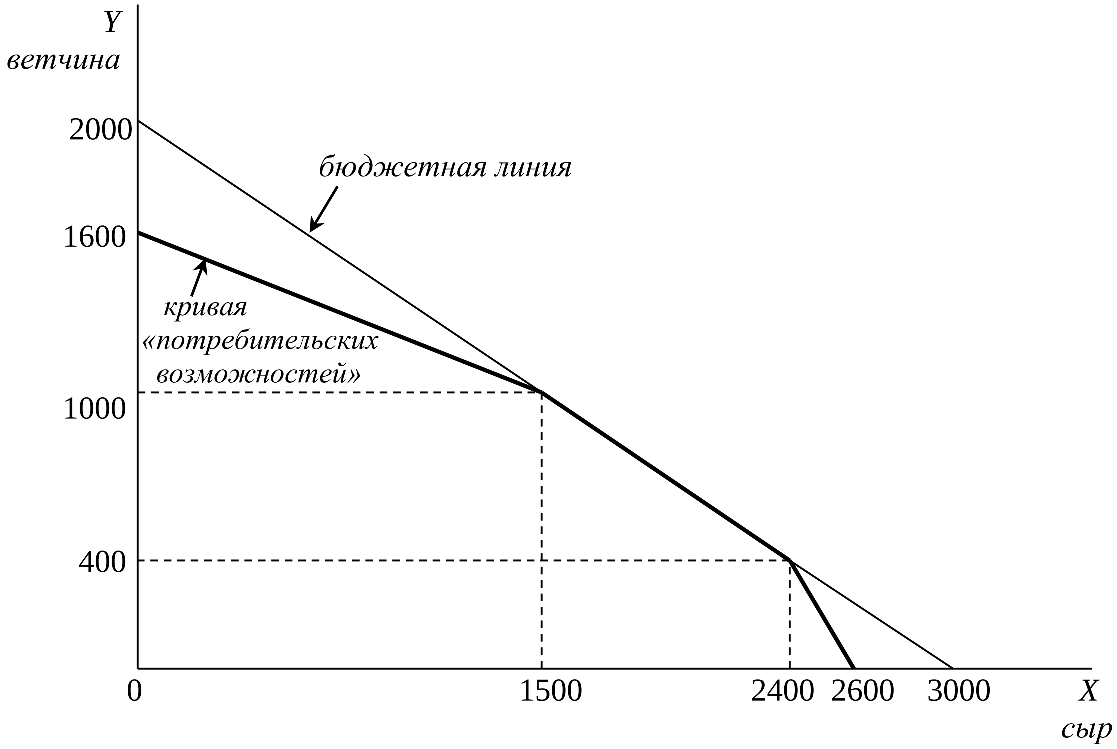
В течение дня старушка может скушать некоторое количество сыра (X_1) и ветчины (Y_1), то и другое в граммах. Множество комбинаций этих продуктов ограничивается прямой, имеющей уравнение: $Y_1 = 600 - 0{,}4X_1$. То, что не доела старушка, достается ее бульдогу. Бульдог в течение дня может съесть одну из комбинаций продуктов, множество которых ограничивается следующей прямой: $Y_2 = 600 - \frac{2}{3}X_2$. То, что не доел бульдог, достается коту. Аналогичное уравнение для кота: $Y_3 = 400 - 4X_3$.

Продукты, которые не доел кот, достаются мышонку, живущему под полом. Мышонку уже безразлично, какие это продукты – сыр или ветчина. Для него главное – это получить некоторое количество грамм еды. Какое минимальное общее количество продуктов (в граммах) может получить мышонок в течение дня?

Подсказка: в этой задаче по аналогии с общей кривой производственных возможностей можно построить общую кривую «потребительских возможностей» (но можно решить и без построения графика).

Решение I (с построением графика)

Сформулируем уравнение бюджетной линии для старушки: $600 = 0{,}2X + 0{,}3Y$ (здесь X – общее количество сыра, Y – общее количество ветчины, то и другое в *граммах*). $Y = 2000 - \frac{2}{3}X$. Совместим бюджетную линию с общим графиком «потребительских возможностей»:



Как мы видим, существует интервал потребительских возможностей ($1500 \le X \le 2400$; $400 \le Y \le 1000$), на котором старушка, бульдог и кот, вместе взятые, съедают весь объем продуктов, купленных на весь бюджет. Это значит, что в некоторые дни мышонку не остается ничего. *Минимальное* общее количество продуктов, которое может получить мышонок, равно нулю.

Ответ: 0.

Решение II (без построения графика)

Попробуем доказать пессимистическое предположение о том, что в некоторые дни мышонку не останется ничего. Предположим, существует такой набор продуктов (x, y), купленный на весь бюджет, который полностью съедается старушкой, бульдогом и котом, вместе взятыми.

Поскольку съедается весь сыр, выполняется равенство: $X_1 + X_2 + X_3 = x$. Вся ветчина также съедается, поэтому: $Y_1 + Y_2 + Y_3 = y$. Уравнение бюджета: $y = 2000 - \frac{2}{3}x$. Из условия известно, что $Y_1 = 600 - 0{,}4X_1$; $Y_2 = 600 - \frac{2}{3}X_2$; $Y_3 = 400 - 4X_3$. Отсюда $(600 - 0{,}4X_1) + (600 - \frac{2}{3}X_2) + (400 - 4X_3) = 2000 - \frac{2}{3}x$. $-0{,}4X_1 - \frac{2}{3}X_2 - 4X_3 = 400 - \frac{2}{3}x$.

Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = x & (1) \\ -0{,}4X_1 - \frac{2}{3}X_2 - 4X_3 = 400 - \frac{2}{3}x & (2) \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на $\frac{2}{3}$ и сложив его со вторым, получаем: $X_1 = 1500 + 12{,}5X_3$. Из уравнения $Y_1 = 600 - 0{,}4X_1$ следует, что старушка не может съесть больше 1500 грамм сыра. То есть выполнение условий, из которых мы исходили, возможно лишь в случае, если $X_3 = 0$. Итак, $X_1 = 1500$. Подставив полученные значения X_1 и X_3 в уравнение (1), имеем: $1500 + X_2 = x$. $X_2 = x - 1500$.

X_2 – это количество сыра, которое может съесть бульдог. Из уравнения $Y_2 = 600 - \frac{2}{3}X_2$ следует, что $0 \le X_2 \le 900$. Отсюда $0 \le x - 1500 \le 900$. $1500 \le x \le 2400$. $y = 2000 - \frac{2}{3}x$. $x = 3000 - 1{,}5y$. $1500 \le 3000 - 1{,}5y \le 2400$. $400 \le y \le 1000$.

Таким образом, мы доказали, что существует интервал значений ($1500 \le x \le 2400$, $400 \le y \le 1000$), при которых набор продуктов, купленный на весь бюджет, полностью съедается старушкой, бульдогом и котом, вместе взятыми. То есть *минимальное* общее количество продуктов, которое может получить мышонок, равно нулю.

Ответ: 0.

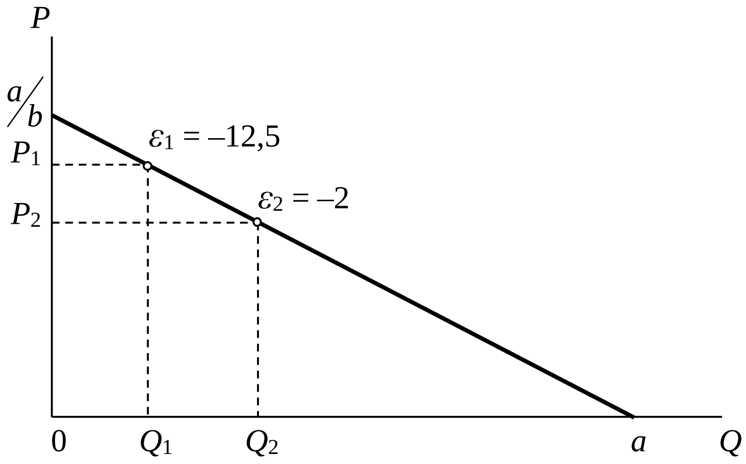
Задача 4

Вес: 15 баллов

В одной из точек на графике линейной функции спроса, где P и Q представляют собой обратные друг другу величины, точечная эластичность спроса по цене равна (–12,5). В другой точке того же графика, где P численно равно Q, точечная эластичность спроса по цене равна (–2). Сформулируйте уравнение этой функции спроса.

Решение

Представим уравнение линейной функции спроса в общем виде: $Q = a - bP$. Пусть первой из указанных в условии задачи точек соответствует объем Q_1, а второй – Q_2.



Исходя из геометрического определения эластичности, $\frac{a - Q_2}{Q_2} = 2$. $Q_2 = \frac{a}{3}$.

Поскольку $P_2 = Q_2$, выполняется равенство: $Q_2 = a - bQ_2$. $\frac{a}{3} = a - \frac{ab}{3}$. $b = 2$.

Также исходя из геометрического определения эластичности, $\frac{a - Q_1}{Q_1} = 12{,}5$.

$a = 13{,}5Q_1$. Поскольку $P_1 = \frac{1}{Q_1}$, выполняется равенство: $Q_1 = a - \frac{b}{Q_1} = 13{,}5Q_1 - \frac{2}{Q_1}$.

$Q_1^2 = 0{,}16$. $Q_1 = 0{,}4$. $a = 13{,}5Q_1 = 5{,}4$.

Ответ. $Q = 5{,}4 - 2P$.

Задача 5

<u>Вес: 20 баллов</u>

В одной стране основным продуктом питания является кукуруза. При этом на каждые 6 урожайных лет приходится 4 неурожайных. Функция предложения кукурузы в урожайный год имеет вид: $Q_s = 3P$; в неурожайный: $Q_s = 0{,}5P$. Функция спроса в любой год имеет вид: $Q_d = 120 - P$.

Правительство заметило, что население очень нервно реагирует на повышение равновесной цены кукурузы в неурожайный год. Поэтому оно решило поступать следующим образом: была установлена твердая государственная цена на кукурузу, по которой правительство скупало весь избыток товара в урожайные годы и из созданных запасов по той же цене продавало кукурузу в неурожайные годы для того, чтобы ликвидировать дефицит товара.

Какую государственную цену кукурузы установило правительство?

Решение

Пусть государственная цена равна P_G. Избыток кукурузы, который правительство скупит в урожайные 6 лет: $6 \times [3P_G - (120 - P_G)]$. Дефицит кукурузы, который необходимо покрыть в течение 4 неурожайных лет: $4 \times [(120 - P_G) - 0{,}5P_G]$.

$6 \times [3P_G - (120 - P_G)] = 4 \times [(120 - P_G) - 0{,}5P_G]$. $P_G = 40$.

Ответ. 40.

Задача 6

Вес: 20 баллов

Рассчитать ВВП страны и найти сальдо государственного бюджета, если имеются следующие данные:

1.	Покупка жилых помещений домохозяйствами и фирмами	120
2.	Косвенные налоги	55
3.	Доход домохозяйств от недвижимости	100
4.	Экспорт капитала	50
5.	Дивиденды	80
6.	Личные налоги	95
7.	Трансфертные платежи	30
8.	Государственные закупки товаров	304
9.	Налог на прибыль корпораций	130
10.	Импорт	40
11.	Проценты, выплаченные фирмами	70
12.	Нераспределенная прибыль корпораций	15
13.	Заработная плата	500
14.	Доход некорпоративного сектора	100
15.	Взносы на государственное социальное страхование	125
16.	Расходы на обслуживание государственного долга	60
17.	Приобретение государством услуг	200
18.	Амортизационные отчисления	40

Решение:

1. Расчет ВВП по доходам: (10 баллов)

ВВП = ЗП 500 + доход от недвижимости 100 + проценты фирм 70 + прибыль некорпоративного сектора 100 + прибыль корпораций (налог на прибыль130 + нераспределенная прибыль 15 + дивиденды 80) + амортизационные отчисления 40 + косвенные налоги 55 = 1090

2. Расчет сальдо государственного бюджета (10 баллов):

2.1. Доходы бюджета (5 баллов) = косвенные налоги 55 + налог на прибыль корпораций 130 + взносы на государственное социальное страхование 125 + личные налоги 95 = 405

2.2. Расходы бюджета (4баллов) = расходы на обслуживание государственного долга 60 + приобретение государством услуг 200 + Трансфертные платежи 30 + Государственные закупки товаров 304 = 594

2.3. Дефицит госбюджета (1 балл) = 594 – 405 = 189.

Всего за задачи: 120 баллов

ИТОГО: за тестовые задания и задачи 180 баллов