Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

М I 9-07

Фамилия Пупков

Имя Кирилл

Отчество Вадимович

Класс 9

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ „СОШ № 146" г. Перми

Задача № 1

Да, может.

$$10 \to 5,\ 5$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Первым действием делим 10 на 5 и 5.

Далее на каждом ходу сначала объединяем кучи, соединенные линией (в сумме 10 конфет)

Потом их разделяем на 5 и 5.

В итоге мы получим 11 куч по 5.

Ответ: да.

	1	2	3	4	5	Σ
к.р.	+	+	+	−0	−0	
	7 Ак	7 Ак	7 Ак	ин	ин	

Задача № 2 [illegible]

При $n =$ ~~198~~ 202.

Оценка: Пусть $n \geq$ ~~199~~ 203. Возьмем центральное число (любое, если их чётно). Слева ~~[illegible]~~ и справа от него находятся хотя бы 101 число. Если число положительное, то посмотрим на 3 наибольших числа. Наименьшее из них (ведь нет одинаковых чисел хотя бы 10!) хотя бы 990. Значит сумма квадратов не менее $990^2 + 1000^2 + 1010^2 =$
$= 980100 + 1000000 + 1020100 > 3000000$. Противоречие.
Аналогично, если ~~сред~~ центральное число непопо-

жительно, то посмотрим на 3 наименьших (по модулю не менее 990, 1000, 1010) и их сумма квадратов также больше 3000000. Противоречие.

Пример: $n = 202$

$$\underbrace{-1005, -995, -985, \dots, -25, -15}_{100}, \underbrace{-5, \dots, 5, 15, 25, \dots, 985, 995, 1005}_{101}$$

$985^2 + 995^2 + 1005^2 = 970225 + 1000000 + 1010025 <$

< 3000000

Ответ: $n = 202$.

Задача № 3

Коля выигрывает. Покрасим доску в шахматном порядке и посмотрим на черные клетки (их 32). Каждым ходом доминошка накрывает одну черную и одну белую клетки. Пусть Коля всегда ходит в произвольную черную клетку. Дима не может покрыть 2 крестика, т.к никакие 2 рядом не стоят. Таким образом каждый ход кол-во доступных черных клеток уменьшается на 1. Т.к их кол-во четно, то Коля займет последнюю черную и Дима не сможет сходить (нет черных и никакие 2 крестика не стоят рядом). Коля выиграл.

Ответ: Коля

Задача №4

гипотеза

Если у числа вида $py+1$ есть простой делитель больший p, то ~~$\frac{py+1}{p}$~~ его уже никак не разложить на произведение двух чисел больше y (ведь все оставшиеся $\frac{py+1}{k}$ (~~...~~ $<y$)).
$(k>p)$

Предположим, что ни у одного числа

$p+1$
$2p+1$
$3p+1$
$4p+1$
⋮
$\left[\frac{p}{2}\right]p+1$

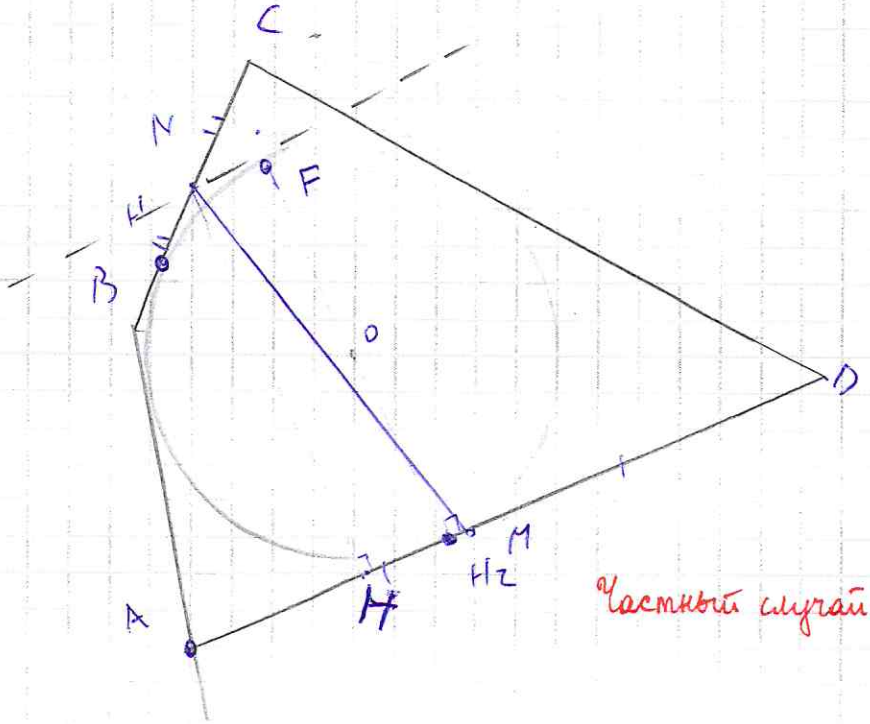
вида $py+1$ ($y<p/2$) нету простого делителя, большего p.

Тогда произведение простых множителей, меньших p в $p+1$ должно быть более 1, в $2p+1$ более 2, в $3p+1$ более 3 и т.д.

То есть произведение всех простых меньше p в этих числах не менее $\left(\left[\frac{p}{2}\right]\right)!$ И что из этого следует? ~~Но всего двоек может быть не более $p/4$, троек не более $p/6$ и т.д.~~

~~Значит наибольшее возможное их произведение $\left(\left[\frac{p}{2}\right]\right)^{n}$, где n — кол. во простых на промежутке $[2;p)$, что уже при~~

Задача №5



Частный случай

Проведем перпендикуляр из N на AD.

$NH < NM$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

М-2-9-09

Фамилия Пупков

Имя Кирилл

Отчество Вадимович

Класс 9

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ "СОШ № 146" г. Перми

M-2-9-09

	6	7	8	9	10	Σ
Ar	+	+	+	+.	0	
	7	7	7	7	0	28
	К.Р.	Ау	К.Р.	Ау	Ау	

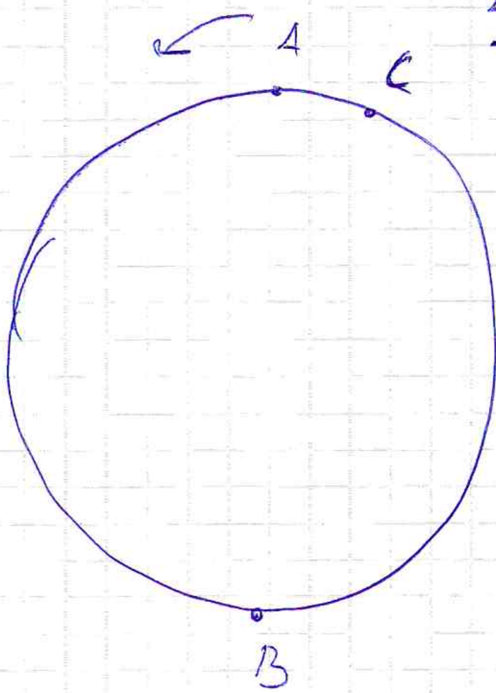
~~Задача № 9.9.~~

~~Пусть такой k-угольник (k нечетное) нашелся.~~

~~Тогда все в нем параллельные:~~

~~1) 2 диагонали исходного многоугольника~~

Задача № 9.6



Пусть они стартуют с точки A. Пусть Миша добежит до B (раньше Пети, его v выше) и развернется (A->B полкруга). Тогда он встретит Петю навстречу. Когда Миша уже добежит снова до A, Петя еще будет к ней только подбегать (ведь Миша пробежал ровно круг, Петя меньше). Тогда Миша снова встретит его (навстречу) в некоторой точке C и потом через очень маленькое время точнее? (или почти сразу) развернется (может, ведь пробежал A->C больше полкруга) и сразу догонит Мишу снова. Достаточно развернуться очень быстро.
Миша встречался с Петей 3 раза.

Задача № 9.7

Заметим, что все числа различны. Значит. Между любыми зелеными хамелеонами должен быть хотя бы один коричневый (иначе кто-то из них солжет, ведь кол-во зеленых не изменялось. Таким образом зеленых не более $\left\lceil \frac{2019}{2} \right\rceil = 1010$ (ведь они не могут стоять подряд)

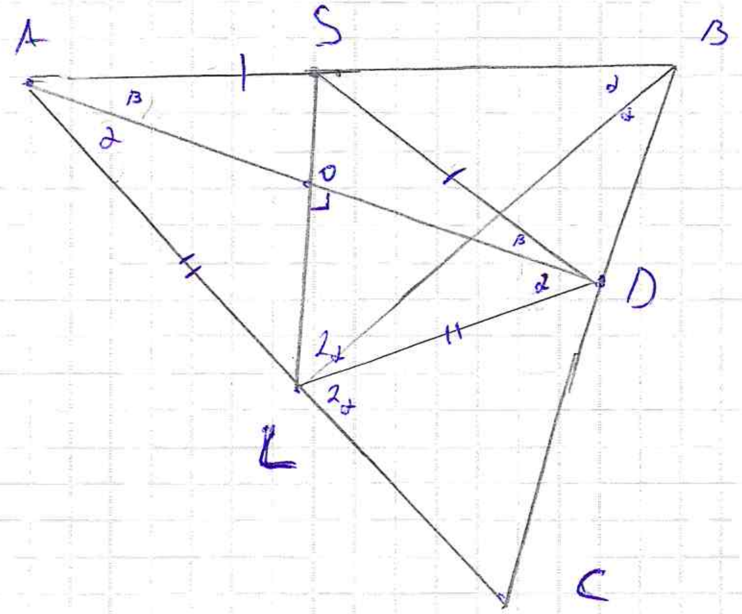
Пример: З = зел. К = коричневый Число = которое назвал.

З	К	З	К	З	…	З	К	З
1010	1	1011	2	1012		2018	1009	2019

Нетрудно заметить, что все К. солгали (т.к зеленых ≥ 1010 изначально). Все З. сказали правду ведь их число увеличивалось на 1 после каждого вопроса коричневому и изначально оно было верно (1010).

Ответ: 1010

Задача №9. 8



Пусть $\angle SBL = \angle LBC = \alpha$

$\triangle CLD = \triangle SLD$ (из симметрии) $\Rightarrow$

$\angle DLC = \angle ABD = 2\alpha = \angle SLD$ (из вписанности $ABLD$)

$\angle ABL = \angle ADL = \angle LBD = \angle LAD = \alpha$ (тоже из впис.)

Пусть $\angle SAD = \beta$

Тогда $\angle LDC = \angle SDL = \angle SAL = \alpha + \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle SDA = \beta \Rightarrow SA = SD$ (т.к. $\angle SAD = \angle SDA$)

$AL = LD$ (т.к. $\angle LAD = \angle ADL$)

$SALD$ - дельтоид, а значит.

$\angle LOD = 180 - \angle OLD - \angle ODL = 180 - 3\alpha = 90^\circ$

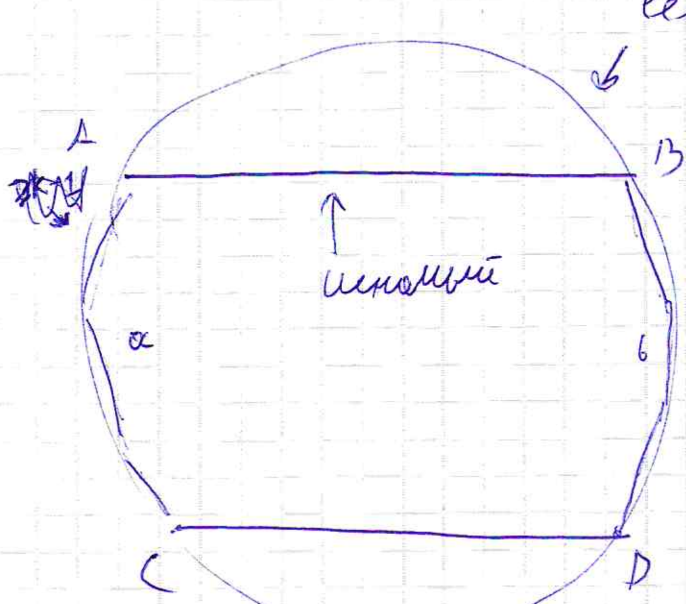
$3\alpha = 90^\circ$

$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

Ответ: 60°

Задача № 9.9

Пусть такой k-угольник с двумя параллельными сторонами нашелся. Рассмотрим эти 2 параллельные стороны AB и CD.



Эти стороны могут быть образованы как сторонами так и диагоналями исходного многоугольника, это не важно.

k угольника или сторон

Тогда пусть от A до C идут a ребер (диагоналей исходного), и от B до D b ребер. (Наперекрест они идти не могут, тогда они разобьют многоугольник).

$k = a + b + 2$. Поймем, что каждое ребро (диагональ) "перепрыгивает" хотя бы через $k-1$ ребро исходного (иначе в отсеченной части не получится сделать k-угольник). Тогда от A до C ~~более~~ не менее $a(k-1)$ ребер исходного. А от B до C не менее $b(k-1)$

Лемма: чтобы разбить n угольник непересекающимися диагоналями на k-угольники, $n-2$ должно делиться на $k-2$. (док-во в конце) в частности, a_i может быть 0, тогда это не диагональ, а сторона ~~исходного~~ изначального.

Тогда каждый многоугольник, отсеченный ребром по пути из A до C или из B до D должен содержать $a_i(k-2)+2$ вершин, $a_i \in N$. Соотв., ребро должно „перепрыгивать" через $a_i(k-2)+1$ ребер исходного.

Тогда кол-во ребер исходного многоугол. от A до C равно $n(k-2)+a$; $n \in N$. Аналогично, от B до D $m(k-2)+b$; $m \in N$. Но т.к $AB \parallel CD$ и многоугольник правильный то просто из симметрии $n(k-2)+a = m(k-2)+b$ (ведь правильный многоуг. симметричен)

$(n-m)(k-2) = b-a$ $k-2 = a+b$ (из опр.)

$(n-m)(a+b) = b-a \Rightarrow n-m = \dfrac{b-a}{b+a}$. Но ведь n и m числа ~~натуральные~~ целые, (как и b, и a), а $b-a < b+a$. Значит такое возможно только при $b=a$ и $n=m$. Но если $b=a=t$, то $k = a+b+2 = 2t+2$ – четное, получаем противоречие. ~~Мы не рассматривали~~ случай,

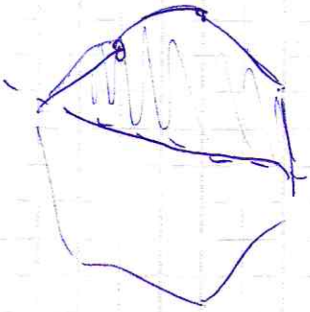
Док-во леммы:

или $a=0$

что невозможно (никто не соед. параллельные стороны).

 М-2-9-09

Лемма: Пусть у нас есть n-угольник, разбитый на k-угольники непересекающимися диагоналями. (крайний случай $n=k$ не рассм.)



Значит должен быть „крайний" многоугольник (такой, что только одна его сторона – диагональ исходного).

Он есть например потому, что при ~~делении~~ проведении в n-угольнике диагоналей по одной он либо остается, либо делится новой диагональю и образует новый.

Отрежем этот крайний многоуг. по диагонали исходного. Теперь у нас $n-(k-2)$ вершин, все еще разбит на k-угольники. Продолжим это делать пока не останется один k-угольник.

Итого: $n = k + m(k-2) = k + mk - 2m =$

$= k-2 + 2 - 2m + mk = m(k-2) + k-2 + 2 = (k-2)(m+1)+2$

ч. и т. д.