Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI – 11 – 19

Фамилия Федосеев

Имя Юрий

Отчество Васильевич

Класс 11

Территория Пермь

Образовательная организация МАОУ „СОШ № 9"

1	2	3	4	5	Σ
хр +	хр +	хр 0	хр 0	хр −	
7пв	7Б	0Б	0НА	0НА	14

МГ-11-19

1) 77 можно разбить на натуральные? множители только как (-1;-77), (-7;-11), (1;77), (7;11). ~~Рассмотрим эти 4 случая~~

~~слу~~

Это означает, что два наибольших числа составляют какую-то из этих пар. Рассмотрим все случаи:

случай 1 (-1;-77):

Если -1 и -77 - наибольшие числа, то все оставшиеся числа < -77 => любое произведение оставшихся чисел ≠ 77, что нарушает условие

случай 2 (-11;-7): либо n=2

Если -11 и -7 - наибольшие числа, то все оставшиеся числа < -11 => их произведение > 121, что нарушает условие

случай 3 (1;77):

Если 1 и 77 - пара наибольших, то пара наименьших или (-7;-11), или (-1;-77).

В первом подслучае нет чисел > 1 кроме 77 и чисел < -7 кроме -11 => n = 11

Во втором подслучае нет чисел > 1 кроме 77 и чисел < -1 кроме -77 => n = 3 n=5 : -77, -1, 0, 1, 77

случай 4 (7;11):

аналогично случаю 3 разбивается на 2 подслучая. В случае 4.1 n = 17; в случае 4.2 n = 11

Ответ: 17

② Предположим, что не существует числа, которое находится одновременно в A и B. Тогда существует $2n$ различных натуральных чисел, сумма которых $= 2n^2$. Минимальная сумма этих чисел $= 1+2+3+\ldots+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2+n$. $2n^2+n = 2n^2$ только при $n=0$ => предположение ошибочно => такое число существует, ч. т. д.

⑤ Ответ: $\frac{(N-1)\cdot N\cdot(N+1)}{2}$ можно меньше для $N=3$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

М-2-11-09

Фамилия Федосеев Ю.

Имя Юрий

Отчество Васильевич

Класс 11

Территория Пермь

Образовательная организация МАОУ „СОШ „9"

М-2-11-09

6	7	8	9	10	Σ
$+_{хр}$	$+_{хр}$	$+_{Б}$	0	0	21
$7_{Б}$	$7_{НА}$	$7_{ск}$	$0_{НА}$	$0_{НА}$	

7. Распределим все натуральные число в 2 бесконечные последовательности последовательностей таким образом: $(n \to \infty)(m \to \infty)$

$2^0(1+4\cdot0), 2^0(1+4\cdot1), 2^0(1+4\cdot2) \dots 2^0(1+4\cdot n)$ $\quad 2^0(3+4\cdot0), 2^0(3+4\cdot1), 2^0(3+4\cdot2) \dots 2^0(3+4\cdot n)$

$2^1(1+4\cdot0), 2^1(1+4\cdot1), 2^1(1+4\cdot2) \dots 2^1(1+4\cdot n)$ $\quad 2^1(3+4\cdot0), 2^1(3+4\cdot1), 2^1(3+4\cdot2) \dots 2^1(3+4\cdot n)$

$\dots$ $\quad \dots$

$2^m(1+4\cdot0), 2^m(1+4\cdot1) \dots 2^m(1+4\cdot n)$ $\quad 2^m(3+4\cdot0), 2^m(3+4\cdot1) \dots 2^m(3+4\cdot n)$

Будем называть последовательности вида $2^k(1+4t)$ как ka, а последовательности вида $2^k(3+4t)$ как $kв$. ~~Раскрасим все числа в последовательностях~~ В последовательностях $0a$ и $0в$ содержатся все нечетные числа, при этом только по одному разу. Аналогично с последовательностями $a1$ и $в1$ и числами которые $\vdots 2$, но $\not\vdots 4$ и т.д. Таким образом, в этих последовательнастях содержатся все числа только по одному разу. Раскрасим все числа в последовательностях с буквой „a" в один цвет, в последовательностях с буквой „в" - в другой. ~~Предположим, что среди всех последовательностей с буквой „a" есть 2 числа, сумма которых - степень 2. Тогда получим, что $x_1(1+4y_1)+x_2(1+4y_2)=2^z$, где x_1, x_2 - степени 2, y_1, y_2, z - натуральные числа или 0. Если~~

Любое число из последовательностей ~~0*~~ 0* (одинов) может образовать степень 2 только при сложении с числом из последовательностей 0*, т.к. все остальные числа ⋮ 2. Аналогично, любое число из ~~сру~~ последовательностей 1* может образовать степень 2 только при сложении с числом из 1*, т.к. все числа из p*, где p > 1 ⋮ 4, а числа из 0* для образования степени 2 могут складываться только с собой. Аналогично для всех остальных последовательностей. Предположим, что в ka есть 2 числа, сумма которых - степень 2. Тогда $k(1+4x_1)+k(1+4x_2)=2^z$, где x_1, x_2, z - натуральные

$2k+4x_1k+4x_2k=2^z \mid :2$

$k+2x_1k+2x_2k=2^{z-1}$.

Т.к. k - степень 2, разделим ур-ие на k:

$1+2x_1+2x_2=2^{z-1-\log_2 k}$

Получим, что нечетное число равно степени 2, что невозможно (2^0 не рассматривается, т.к. сумма различных натуральных чисел всегда $\neq 2^0$). Аналогично докажем невозможность для чисел из kв, таким образом получим, что можно раскрасить все натуральные числа в 2 цвета так, чтобы никакая сумма 2-ух различных одноцветных чисел не являлась степенью 2

Ответ: да

6 Запишем на доску $(x^3+1)(x+1)=x^4+x^3+x+1$

Запишем ~~$x^4+1-(x^4+x^3+x+1)=-x^3-x$~~ $x^4+x^3+x+1-(x^4+1)=x^3+x$

~~При $x>0$ $-x^3<0$ и $-x<0 \Rightarrow -x^3-x<0$~~

~~При $x<0$ $-x^3>0$ и $-x>0 \Rightarrow -x^3-x>0$~~

При $x>0$ $x^3>0$ и $x>0 \Rightarrow x^3+x>0$

При $x<0$ $x^3<0$ и $x<0 \Rightarrow x^3+x<0$

8 Представим $\sin x+\cos y$ как $\frac{a}{b}$,

$\sin y+\cos x$ как $\frac{c}{d}$. (a, b, c, d) – натуральные

$$\begin{cases}\sin x=\frac{a}{b}-\cos y\\ \cos x=\frac{c}{d}-\sin y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 x=\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos y+\cos^2 y\\ \cos^2 x=\frac{c^2}{d^2}-2\frac{c}{d}\sin y+\sin^2 y\end{cases}$$

$$1=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}-2\frac{a}{b}\cos y-2\frac{c}{d}\sin y+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{a}{b}\cos y+2\frac{c}{d}\sin y=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2} \quad \Big| \cdot b^2d^2$$

$$2abd^2\cos y+2cb^2d\sin y=a^2d^2+b^2c^2$$

$$2bd(ad\cos y+cb\sin y)=a^2d^2+b^2c^2$$

$$ad\cos y+cb\sin y=\frac{a^2d^2+b^2c^2}{2bd} \quad (1)$$

$$\begin{cases}\sin x=\frac{a}{b}-\cos y\\ \cos x=\frac{c}{d}-\sin y\end{cases}$$

~~Пусть $m=ad$, $n=cb$. Тогда~~

~~$ad\cdot\frac{a}{b}-ad\cos y+cb\cdot\frac{c}{d}-cb\sin y$~~

Пусть $m=2abd^2$; $n=2b^2cd$. Тогда

$2a^2d^2+2b^2c^2-2bd(ad\cos y+bc\sin y)$ должно быть натуральным. Подставим(1): $m\sin x+n\cos x=$

$= a^2d^2 + b^2c^2 \Rightarrow m\sin x + n\cos x$ натурально, ч. т. д.