Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI 10 - 13

Фамилия Халикин

Имя Тимур

Отчество Сергеевич

Класс 10

Территория г. Пермь

Образовательная организация Школа 9

Уход: 10^{44}
Приход: 10^{48}
Уход: 12^{28}
Приход: 12^{32}

 МI 10-13

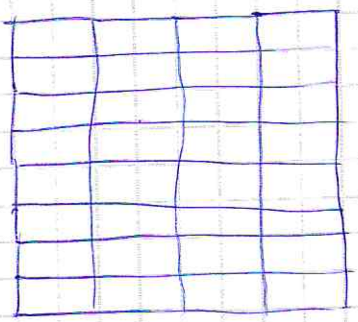
1	2	3	4	5	Σ
+мм	+т	+k	Oвм	Oм	
7м	7л5	7м	0		21

(1) Рассмотрим число 1567. Сумма его цифр $1+5+6+7=19$. Произведение его цифр $1\cdot5\cdot6\cdot7=210$. $210\cdot19=3990$. Таким образом, число 1567 обладает данным свойством.

Ответ: 1567

(3) Разобьем игровое поле на прямоугольники

\+ 1×2 как на рисунке и назовём каждый такой прямоугольник 1×2 "участком".



Участок будем считать "свободным", если он не покрыт ~~ни одной~~ доминошкой и в нем нет ни одного крестика.

Опишем выигрышную стратегию для Димы. За каждый свой ход Коля ставит ~~x~~ крестик либо в свободный участок, либо в участок, в котором уже стоит один крестик.

Если Коля поставил крестик в свободный участок, Дима ~~покр~~ покрывает доминошкой

А он существует?

другой свободный участок. Иначе покрывает тот участок, в котором Коля поставил свой крестик. Таким образом после каждого хода Димы на игровом поле всегда будет оставаться четное кол-во участков, так как оно либо уменьшается на 2, либо остаётся неизменным, а изначально участков было 32 — чётное кол-во. Таким образом, после каждого хода Коли в свободный участок Дима сможет найти другой свободный участок, чтобы покрыть его.

После какого-то хода Димы на поле не остаётся свободных участков. Тогда возможны две ситуации:

1. Все ~~клетки~~ участки покрыты доминошками, тогда Коле некуда сходить и Дима выигрывает.
2. Остаётся на поле некоторое кол-во участков, в которых стоит ровно 1 крестик. Тогда в каждый последующий ход Коля ставит крестик в один из таких участков (у него другого выбора нет), а Дима покрывает такой участок.
   После какого-то хода Димы случится вышеописанная ситуация №1. и Дима выиграет.

Таким образом, Дима имеет выигрышную тактику.

Ответ: Дима имеет выигрышную стратегию.

2) Предположим, что числа X такого, что $x \in A$ и $x \in B$ не существует, тогда множество $C = A \cup B$ состоит ровно из $2n$ различных элементов, которые в сумме дают $2n^2$.

Минимальная возможная сумма $2n$ различных натуральных чисел есть сумма первых $2n$ натуральных чисел, то есть

$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$. Так как $n > 0$, то

$2n^2 + n > 2n^2$, то есть, другими словами, наименьшая возможная сумма элеметов множества C больше фактической суммы элементов, чего быть не может.

То есть обязательно найдётся такое число X, что $x \in A$ и $x \in B$.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г. М-2-10-13

Фамилия Халикшин

Имя Тимур

Отчество Сергеевич

Класс 10

Территория г. Пермь

Образовательная организация Школа 9

М-2-10-13

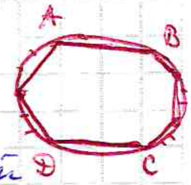
6	7	8	9	10	Σ
+вм 7т	+п.о. 7т	0вм м 0	−к 0аб	−м 0к	14

(6) Умножим выражение $\cos x$ на выражение $\cos x$. Получим $\cos^2 x$ и допишем его на доску. Сложим оба выражения на доске и получим выражение $\cos^2 x + \cos x$, которое при $x = \pi$ принимает значение 0:
$\cos^2 x + \cos x = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$

Ответ: Да, можно.

(9) Назовём ~~диагонали~~ разрезы соседними, если ни один отрезок, соединяющий две точки на этих ~~диагоналях~~ разрезах внутри многоугольника, не пересекает другие ~~диагонали~~ разрезы. Т.е. соседние — это стороны одного многоуг-ка?

Назовём ~~диагональ~~ разрез крайним, если все остальные разрезы пересекают многоугольник по одну сторону от данного разреза.



AB‖CD

Заметим, что соседние разрезы не могут быть параллельными, иначе они отрезают от описанной около правильного многоугольника окружности равные дуги, то есть на них находится равное количество сторон отрезанного многоугольника и, тогда, кол-во сторон этого многоугольника чётное. не обязательно!

Также заметим, что если разрез параллелен ~~о~~ стороне правильного многоугольник, то он не может быть крайним (иначе кол-во ~~граней~~ сторон у отрезанного им многоугольника чётное) и не может быть соседним (аналогично двум разрезам) с этой гранью (иначе либо кол-во сторон у получившихся многоугольников чётное, либо оно не равно). Таким образом данные параллельные разрез и сторона находятся в разных многоугольниках.

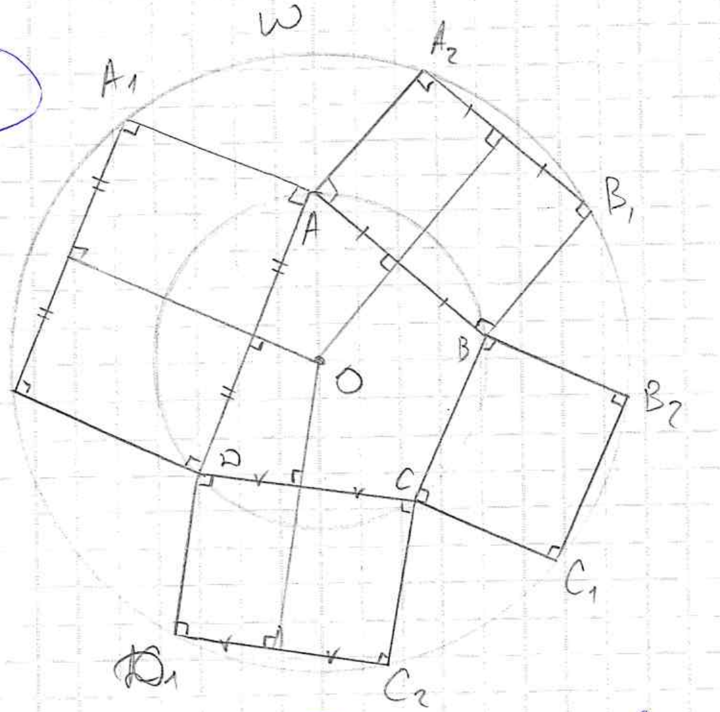
Таким образом, параллельными в хорошем многоугольнике могут быть только стороны правильного многоугольника. – Не доказано.

Такие стороны существуют только в правильных многоугольниках с чётным кол-вом сторон и данные стороны противоположны.

Но если такие стороны находятся в одном отрезанном многоугольнике с нечётным кол-вом сторон, то тогда в исходном многоугольнике по разные стороны от прямой, их соединяющей, находятся разное кол-во сторон, что не может быть из-за того, что исходный многоугольник – правильный.

Ответ: нет, не может.

7



Дано:

$ABCD$ - выпуклый

AA_2B_1B, BB_2C_1C, CC_2D_1D, DD_2A_1A } прямоуг.

$\{A_1; A_2; B_1; B_2; \cancel{B_1}; C_2; D_1; D_2\} \subset \omega$

Доказать:

$ABCD$ - вписанный

Доказательство:

Пусть O - центр ω.

1. A_2B_1 - хорда в ω. Проведем радиус через ~~с~~ середину A_2B_1. Он будет ~~проходить также и через~~ перпендикулярен этой хорде. А так как AA_2B_1B - прямоугольник, то и перпендикулярен AB. Так как AA_2 параллелен данному радиусу, то радиус поделит отрезок AB также пополам.

2. Таким образом точка O лежит на серединном перпендикуляре к AB и равноудалена от A и B

3. Аналогичное проделаем для хорды D_2A_1 и получим, что точка O равноудалена от A и D. И также для хорды D_1C_2 делаем аналогичное и получаем, что точка O равноудалена от D и C.

+

4. Таким образом точка O равноудалена от всех четырех точек ~~прям~~ четырехугольника $ABCD$, а значит он является вписанным.

(10) Для того, чтобы ~~узнать~~ определить многочлен, степень которого не превышает 2, необходимо знать значения хотя бы в трёх точках.

Но через любые три точки можно провести многочлен, степень которого не превышает 2, поэтому необходима четвёртая точка, чтобы точно сказать, существует ли такой многочлен.

При $n<7$ Петя может дать ~~точек~~ не больше трёх точек каждого многочлена, но при $n=7$ найдётся хотя бы 4 такие точки, что они принадлежат одному многочлену.

Да, может, но это не значит, что Вася не может угадать за 6 ходов.

Тогда Вася, перебрав все четверки точек сможет точно ~~ска~~ назвать один из загаданных многочленов.

Ответ: При $n=7$ Вася имеет стратегию.