Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI-11-14

Фамилия Черемных

Имя Захар

Отчество Олегович

Класс 11

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ "СОШ №9 им А.С. Пушкина"

МГ-11-14

Задача 1

Рассмотрим все способы разбить 77 на 2 целых множителя: $-77 \cdot -1$, $-11 \cdot -7$, $7 \cdot 11$, $1 \cdot 77$. Заметим, что выбирая пару множителей как наименьшие, мы ограничиваем себя снизу максимальным числом из них, а выбирая пару множителей как наибольших, мы ограничиваем себя сверху минимальным из них. То есть все числа, которые мы можем написать на доске это ~~пары~~ представление пары множителей в количестве не более 2 (по условию числа должны быть различны) и все числа, находящиеся в промежутке от максимального и минимальной пары и минимального из максимальной пары. Таким образом ~~брать пол~~ взяв ~~любую из этих пар только~~ только одну любую из этих пар мы сможем максимально получить 2 числа (саму эту пару взять). 2 ~~образует~~ пары мы получим ~~всегда~~ в случае с $(-77 \cdot -1, 1 \cdot 77)$ 5 чисел, в случае с $(-77 \cdot -1, 7 \cdot 11)$ и $(-7 \cdot -11, 1 \cdot 77)$ 10 чисел, в случае с $(-77 \cdot -1, -7 \cdot -11)$ и $(1 \cdot 77, 7 \cdot 11)$ ничего, так как это противоречит условию, в случае с $(-7 \cdot -11, 7 \cdot 11)$ 17 чисел. То есть n максимально равно 17.

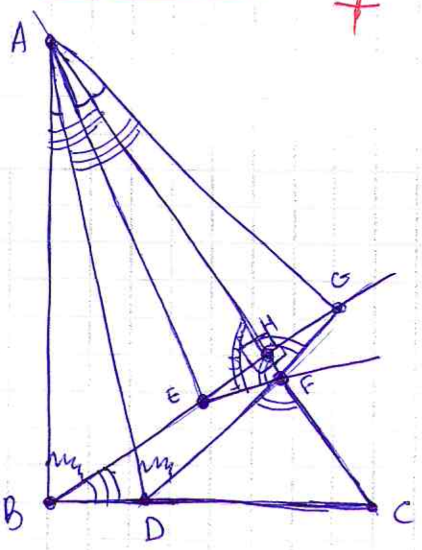
Если представлять графически, то ~~вот~~

получится такой рисунок, где ответом будет отрезок, начинающийся с "˥" а заканчивающийся на "L" (слева направо), как видно из рисунка получается такой же ответ $(-11 \cdot -7, 7 \cdot 11)$, то есть 17 чисел.

1	2	3	4	5	Σ
+Б	Ø	+ПЕ	−Б	Ø	
7пр	0ла	7	0ПЕ	0пб	14

Задача 3

+



Продлим BH за точку H и DF за точку F, получим точку G.

$\angle HFE = \angle AFE$, $\angle DFC = \angle CFD$

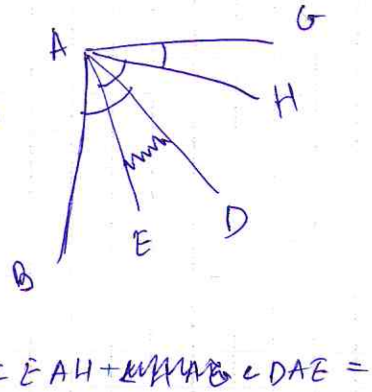
$\angle HFG = \angle DFC = \angle HFE$. вертикальные ~~треугольники~~ $\Delta EHF = \Delta GHF$ по стороне HF и двум прилежащим к ней углам. $EH = HG$. $\Delta AEH = \Delta AGH$ по двум сторонам ($AH = AH$ и $EH = HG$) и углу между ними ($\angle AHE = \angle AHG = 90^\circ$).

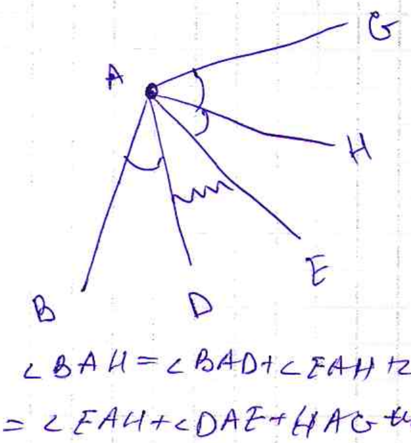
+

Получаем, что $\angle EAH = \angle GAH$. Заметим, что $\angle HBC = \angle CAB$, что следует из $\Delta BHC \sim \Delta AHB$. Заметим, что $\angle BAC = \angle DAG$, то есть $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAE + \angle EAC = \angle DAE + \angle EAC + \angle CAG = \angle DAG$, тогда $\angle DBG = \angle DAG$, то есть можно описать окружность (около) вокруг четырехугольника $DBAG$ +, но тогда $\angle ABG = \angle ADG$, так как они опираются на одну дугу (AG). Получается $\Delta BAH \sim \Delta DAG$ по двум углам, ~~то есть~~ но тогда $\angle AHB = 90^\circ = \angle AGD$. А так как $\Delta AEF = \Delta AGF$ (они состоят из равных), получается $\angle AEF = \angle AGF = 90^\circ$ ч.т.д.

P. S. при другом рисунке может получиться, что $\angle BAD + \angle CAE > \angle BAC$, тогда следует считать $\angle DAE$ отрицательным

$\angle DAE \leq 0$





$\angle DAE \geq 0$

$\angle BAH = \angle BAD + \angle EAH + \angle DAE = \angle EAH + \angle DAE + \angle HAG = \angle DAG$

$\angle BAH = \angle BAD + \angle EAH + \angle DAE = \angle EAH + \angle DAE + \angle HAG = \angle DAG$

Задача 4

~~$y =$~~ $y = \frac{p-3}{2}$

$p \cdot \frac{p-3}{2} + 1 = \frac{p^2-3p}{2} + 1$

$\frac{p^2}{2} - \frac{3}{2}p + 1$

$\frac{p-3}{2} \cdot \frac{p-3}{2} =$

$= \frac{p^2+9-6p}{2}$

$\left(\frac{p-3}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{p-3}{2} + 1\right) =$

$= \frac{(p-3+2) \cdot (p-3+2)}{4} =$

$= \frac{(p-1) \cdot (p-1)}{4} = \frac{p^2-2p+1}{4}$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

11-2-11-25

11:37 - 11:42

Фамилия Черемных

Имя Захар

Отчество Олегович

Класс 11

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ "СОШ №9 им. А.С. Пушкина"

М-2-11-25

Задача ~~№~~ 11.6

~~1) умножим (x^4+1) на (x^3+1), получим $x^7+x^4+x^3+1$~~

~~2) умножим (x^3+1) на (x^4+1), получим $x^7+x^4+x^3+x+1$~~

~~3) сложим ① и ②, получим $x^7+2x^4+2x^3+x+1$~~

~~4) вычтем~~

1) умножим (x^4+1) на (x^3+1), получим $x^7+x^4+x^3+1$

2) вычтем из ① (x^4+1), получим x^7+x^3

• рассмотрим x^7, при положительных x она принимает неотрицательные значения, при отрицательных x, она принимает неположительные значения

• рассмотрим x^3, при положительных x она принимает неотрицательные значения, при отрицательных x, она принимает неположительные значения

• рассмотрим x^7+x^3, так как она является суммой предыдущих, при положительных x она принимает неотрицательные значения, при отрицательных x она принимает неположительные значения

• ответ $(x^4+1)\cdot(x^3+1)-(x^4+1) =$

$= x^7+x^4+x^3+1-x^4-1 =$

$= x^7+x^3$

6	7	8	9	10	Σ
+ Хр	+ НА	+ *	0 Хр	0 Хр	21
7 Б	7 Хр	7 ЕМ	0 А	0 А	

Задача ~~2~~ 11.7

Пусть будет два цвета A и B. Покрасим все степени двойки в цвет A. Разобьём все натуральные числа на блоки $[2^i+1;\ 2^{i+1}]$, где ~~[illegible]~~ i натуральное число. Мы не затронули числа 1 и 2, так как они оба являются степенью двойки, мы ~~[illegible]~~ покрасили их одним цветом. Заметим, что взяв любые два числа цвета A, у нас не получится в сумме степень двойки, так как:

~~[illegible]~~ пусть мы взяли a и b, где $a > b$, так как они не нулевые $(a+b > a)$, значит следующая степень двойки это $2a$, но $b<a$, то есть $a+b < 2a$, значит $a+b$ не является степенью двойки.

Покрасим в цвет B все числа 2^i-1 ~~[illegible]~~, где i натуральное и $i \geq 2$. Заметим, что в каждом блоке мы покрасили ~~[illegible]~~ 2 последних числа. Предпоследнее в B, а последнее в A. Заметим, что любые два числа цвета B в сумме не могут дать степень 2, так как:

пусть мы взяли a и b, где $a>b$. Заметим, ~~[illegible]~~ что $a+b>4$, так как $a \geq 3$ и $b \geq 3$. То есть каждая следующая степень двойки кратна 4, то есть ~~[illegible]~~ $a+b$ должно быть кратно 4. ~~[illegible]~~ Но ~~[illegible]~~ $a \equiv -1 \mod 4$ и $b \equiv -1 \mod 4$, ~~[illegible]~~ так как они цвета B. То есть $a+b \equiv -2 \mod 4$ (не кратно!), получается $a+b$ ~~[illegible]~~ не степень 2

Пусть это будет база. Теперь рассмотрим блок $[2^i+1; 2^{i+1}]$ i - натуральное (i увеличивается на каждом шаге, начиная с $i=1$). Длина блока 2^i, все числа в блоке уже раскрашены, также в каждом следующем блоке раскрашены (и только они) 2^i последних числа. Пройдём с начала блока $[2^i; 2^{i+1}-1]$ до конца и для каждого числа сделаем следующее: пусть это число a

число a уже имеет цвет. Давайте в каждом следующем блоке $[2^j+1; 2^{j+1}]$ (где j - натуральное, $j > i$) покрасим в противоположный цвет число $2^{j+1}-a$. Заметим, что такое число ещё не будет раскрашено, так как $a \geq 2^i$, а в каждом блоке покрашено только 2^i последних чисел.

Таким образом мы полностью покрасим следующий блок $[2^{i+1}+1; 2^{i+2}]$, так как его размер 2^{i+1}, 2^i последних чисел уже было раскрашено, и мы ещё 2^i первых раскрасили.

Теперь рассмотрим блок $[2^{i+1}+1; 2^{i+2}]$ и докажем, что все числа, с 1 и до 2^{i+2} (вкл), покрашены так, что выполняется правило, данное в условии. Для всех чисел $[1; 2^{i+1}]$ это условие уже (на предыдущем шаге) выполнено, осталось доказать для чисел $[2^{i+1}+1; 2^{i+2}]$. Пусть мы взяли число a.

~~...~~ $a > 2^{i+1}$, $a \le 2^{i+2}$. Заметим, что для любого числа a среди чисел $[1; 2^{i+1}]$ найдётся число b такое, что $a+b$, это степень 2, ~~так как~~, а именно (2^{i+2}), так как $b \le 2^{i+1}$ и $a > 2^{i+1}$. Причём такое число будет только одно. И это число b будет другого цвета, ~~не~~ чем число a, потому, что ранее на предыдущих шагах (когда число a было покрашено), число a специально красилось так, чтобы быть противоположного ~~чем~~ цвета, чем b. То есть когда мы проходились по числам в блоке $[2^k; 2^{k+1}-1]$ где k – натуральное число $k \le i$ нам попалось число b и мы покрасили $2^{i+2}-b$ (что есть a) в противоположный цвет.

Если до бесконечности повторить эти шаги, то можно покрасить все натуральные ~~чи~~ числа так, чтобы выполнялись все условия

P.S. пример раскраски

A	A	B	A	A	B	B	A	A	A	B	B	A	B	B	A	A	A	B	A	A	B	B	B	A	A	B	B	A	B	B	A	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

блок $[2^{i+1}; 2^{i+1}]$ для $i = 2$

шаг для $i=2$ заканчивается здесь. после его конца условие выполняется для всех чисел $\le 2^{i+2}$

Задача 11.8

Если $\sin x+\cos y$ и ~~положител~~ $\sin y+\cos x$ положительные рациональные числа, то их можно представить ~~как~~ вот так:

$\sin x+\cos y=\frac{a}{b}$, $\sin y+\cos x=\frac{c}{d}$, где a, b, c, d – натуральные число, тогда:

$$\sin x+\cos y=\sin x+\sqrt{1-\sin^2 y}=\sin x+\sqrt{1-\left(\frac{c}{d}-\cos x\right)^2}=\frac{a}{b} \quad |\,{}^{\wedge}2$$

$$\frac{a}{b}-\sin x=\sqrt{1-\left(\frac{c}{d}-\cos x\right)^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}\sin x+\sin^2 x=1-\frac{c^2}{d^2}+\frac{2c}{d}\cos x-\cos^2 x$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}=\frac{2a}{b}\cdot\sin x+\frac{2c}{d}\cos x+1-\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}=\frac{2a}{b}\cdot\sin x+\frac{2c}{d}\cdot\cos x \quad |\cdot b^2d^2$$

$$a^2d^2+c^2b^2=2abd^2\cdot\sin x+2cdb^2\cdot\cos x$$

$$a^2d^2+b^2c^2=2abd^2\cdot\sin x+2b^2cd\cdot\cos x$$

Заметим, что $a^2d^2+b^2c^2$ есть натуральное число, так как ~~$a^2d^2+b^2c^2$ это натуральные числа~~ a, b, c, d это натуральные числа. ~~А также~~ А также $2abd^2$ и $2b^2cd$ ~~пусть~~ натуральные числа по той же причине.

Тогда, пусть $m=2abd^2$, а $n=2b^2cd$.

Получается, что $m\sin x+n\cos x$ – натуральное число.