Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

M I 10 -25

Фамилия Черников

Имя Кирилл

Отчество Андреевич

Класс 10

Территория г. Пермь

Образовательная организация школа №146

М I 10-25

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	+	
7	7	7	7	7	35

№1

Ответ: 6571.

Действительно, $6\cdot5\cdot7\cdot1\cdot(6+5+7+1)=3990$.

~~Заметим, что раз в множестве А все числа различны, то их сумма минимум равна $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, действительно сумма~~

№2

1) Заметим, что сумма различных n натуральных чисел минимум равна $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, действительно, наименьшее число хотя бы 1, второе по величене хотя бы 2 и т.д., n-ое по величене число хотя бы n.

2) Будем решать задачу методом от противного. Пусть не найдется числа из множества А, которое принадлежит множеству В, иначе говоря

$a_1+a_2+\dots+a_n=n^2$

$b_1+b_2+\dots+b_n=n^2$

не существует $i\in[1;n]$ и $j\in[1;n]$ такое, что $a_i=b_j$

Значит объединение множеств А и В даёт нам $2n$ различных натуральных чисел, а из пункта 1 мы выяснили, что сумма $2n$ натуральных различных чисел минимум равна $\frac{2n\cdot(2n+1)}{2}=n(2n+1)=2n^2+n$, но из условия задачи $(a_1+a_2+\dots+a_n)+(b_1+b_2+\dots+b_n)=n^2+n^2=2n^2$.

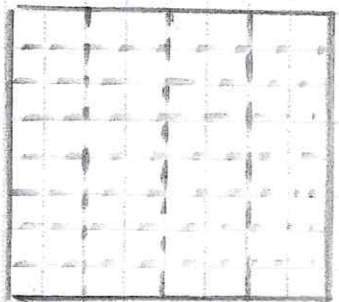
3) В итоге с одной стороны сумма чисел обоих множеств равна $2n^2$, а с другой стороны сумма чисел обоих множеств хотя бы $2n^2+n$, $2n^2+n>2n^2$ (n-натуральное), получили противоречие, значит наше предположение оказалось ложным. Значит найдется

число, ~~которое~~ которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

№3

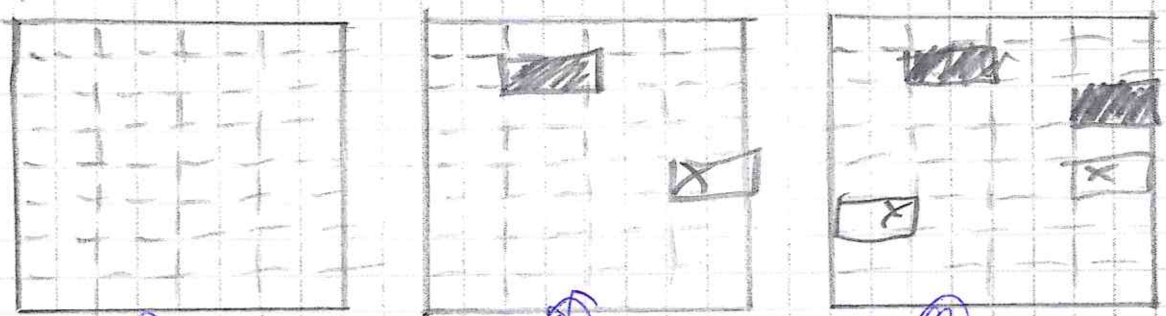
Победит Дима, который ставит доминошки. Для этого достаточно придерживаться следующей стратегии:

1) разобьём поле на 32 таких областей размером 2x1:



2) ~~...~~ Очевидно, что за 1 ход Коля, поставив крестик, может „убить" одну область. ~~...~~ Область называется убитой, если в ней хотя бы один крестик или доминошка. А если ровно 2 крестика? Причём не более одной зоны может убить Коля за свой ход.

Это означает, что если Дима будет стараться в ~~...~~ отмеченные зоны ставить доминошки, там где нет крестиков, в „хорошие" области. Область называется хорошей, если в ней нет ни доминошки, ни крестика. Значит у Димы в кармане 16 ходов. ~~...~~ Коля убивает не более одной хорошей области, Дима ставит в одну из хороших областей доминошку, тем самым убив её. И так 16 ходов, после 1-ого хода обоих будет минимум 30 хороших областей, после 2-ого хода обоих будет минимум 28 хороших областей ... после 16-ого хода обоих будет минимум 0 хороших областей, причём ~~минимум~~ ровно 16 областей будет убито именно доминошкой. Для лучшего понимания написанного предоставлю 3 рисунка частного случая расхождения событий:



а) 32 хороших областей в начале игры

б) 2 убитых области после 1-ого хода

в) минимум 28 хороших областей останется после 2-ого хода

3) Всё, 16 ходов сделано, на поле 16 доминошек, которые ни одного крестика не закрывают (так как мы ~~[illegible]~~ ставили доминошки только в хорошие зоны, не в убитые).

И 16 крестиков на поле. Ход Коли. ~~[illegible]~~ Если он

Такое разве может быть?

никуда поставить крестик не может, мы победили! Пусть Коля может куда-нибудь сходить, тогда на поле станет 17 крестиков на 16 областей, убитых не доминошкой.

хоть может области не убиты

Будем их называть: области, убитые крестиком. Из Дирехле следует, что минимум в одной убитой крестиком области окажется 2 крестика. Тогда просто ставим доминошку сверху этих 2 крестиков. Тогда после 17-ого хода на поле ровно 15 областей убитых крестиком, в

или не убитых ничем

которых 17-2=15 крестиков. И снова Коля ставит крестик, становится 16 крестиков на 15 областей убитых крестиком, но не убитых доминошкой. Снова Вика может поставит доминошку сверху 2 крестиков. Тогда на поле снова 14 областей убитых крестиком, но не убитых доминошкой, на которых 16-2=14 крестиков. И так будем продолжать, пока ~~на поле не останется~~ не дойдёт до 32-хода, на поле 1 крестик в последней области, Коля ставит в отчаяние и свой

Бедный Дирихле!

!!!

последний крестик, и Дима завершает игру последней доминошкой. Победа Димы. Для более строгого доказательства, что на $(16+i)$-ый ход на поле будет убитая крестиком, но не убитая доминошкой область с 2-умя крестиками скажем, что на $(16+i)$-ом ходу будет $32-(16+i-1)=17-i$ областей убитых крестиком, но не убитых доминошкой, в которых $\underbrace{(16+i-1)}_{\text{всего крестов на поле к } (16+i)\text{-ому ходу}}-\underbrace{2(i-1)}_{\text{поставили на 2 креста ровно } (i-1) \text{ доминошку}}=$
$=16+i-1-2i+2=17-i$ крестиков.

Коля ставит ещё 1 крест, и из дирехлёвки образуется убитая 2 крестиками область, но не убитая доминошкой и Дима ставит туда доминошку ~~ход~~ $(16+i)$-ый ход успешно закончен.

Иначе говоря можно привести такую цепочку:

$16\to17\to15\to16\to14\to\ldots\to1\to2\to0$ — число крестиков на областях не убитых доминошками

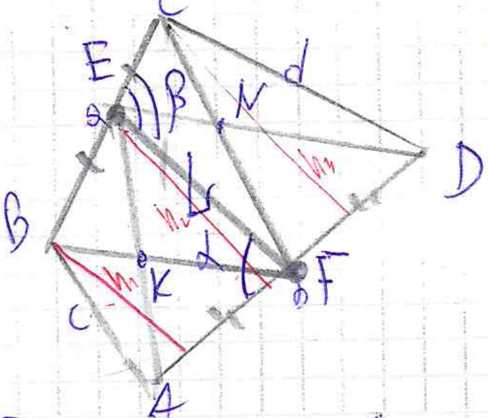
$16\to16\to15\to15\to14\to\ldots\to1\to1\to0$ — число областей не убитых доминошками.

Уважаемый школьник! Использование жаргона при решении задач не делает Вам чести.

№5

1) Так как в четырёхугольник вписана окружность, то площадь его можно найти как $S_0 = \frac{(a+b+c+d)}{2} r$. r – радиус вписанной окр., a, b, c, d – стороны четырёхугольника, тогда так как $a+b=c+d$, то $S_0 = r(a+b)$, где D – диаметр ~~четырёхугольника~~ окр.

Пусть L – длина отрезка, ~~соединяющего~~ BC и AD (видимо, середины BC и AD)



2) Заметим, что $\frac{L\cdot 0,5b\cdot\sin\alpha}{2}\cdot 2 = 0,5Lb\sin\alpha = S_{\triangle AED} \le 0,5Lb$ ✓

$\frac{L\cdot 0,5a\cdot\sin\beta}{2}\cdot 2 = 0,5La\sin\beta = S_{\triangle BFC} \le 0,5La$ ✓

3) Если $S_{KENF} \ge S_{BKA}+S_{CND}$, то $S_{BFC}+S_{AED} \ge S_0$ ✓

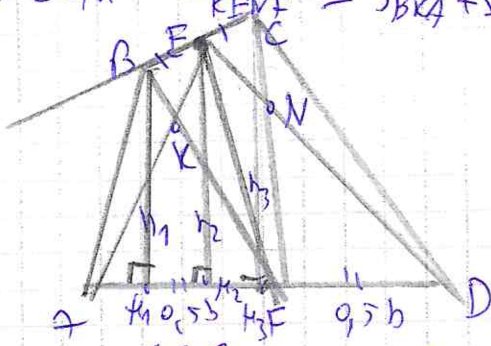
$0,5(b+a)L \ge S_0$ ✓, так как $\sin\alpha \le 1$, $\sin\beta \le 1$

$0,5(b+a)L \ge (a+b)\cdot r$

$L \ge D$ – что и требуется

значит достаточно доказать, что $S_{KENF} \ge S_{BKA}+S_{CND}$ и мы победим!

4)



$S_{ABF} = \frac{h_1\cdot 0,5b}{2}$, где h_1 – расстояние от B до AD, h_2 – расстояние от E до AD, h_3 – расстояние от C до AD

$S_{AEF} = \frac{h_2\cdot 0,5b}{2}$

$S_{FED} = \frac{h_2\cdot 0,5b}{2}$

$S_{CFD} = \frac{h_3\cdot 0,5b}{2}$ $\Rightarrow$ $S_{AEF}+S_{FED}-S_{ABF}-S_{CFD} = S_{KENF}-(S_{ABK}+S_{CND}) =$

$= (2h_2-(h_1+h_3))\cdot\frac{0,5b}{2} \ge 0$ – надо доказать.

Очевидно, что H_1BNH_3 – прямоугольная трапеция, в которой h_2 – средняя линия $\Rightarrow 2h_2 = h_1+h_3 \Rightarrow \boxed{S_{KENF} \ge S_{ABK}+S_{CND}}$

(из теоремы Фалеса, ведь $EH_2 \parallel BH_1 \parallel CH_3$ и $BE=EC$)

$\Downarrow$ $S_{KENF} \ge S_{ABK}+S_{CND}$

 МI 10-25

№4

1) Для первого простого числа, большее 3, $p=5$. Подходит $y=2$
$5\cdot 2+1=11$

2) Заметим, что если $py+1=qk$, где q - максимальное простое число в разложение числа $(py+1)$, если $q>p$, то условие задачи выполнено. Действительно!

$$py+1=qk>pk$$
$$py+1>pk$$
$$y+\frac{1}{p}>k$$
$$y\geqslant k, \text{ так как } \frac{1}{p}<1$$

Значит достаточно доказать, что для данного p подберется такое y, что $(py+1)$ будет иметь простой делитель, больший p. Докажем это.

3) Рассмотрим все возможные варианты $py+1$:

$1\cdot p+1=q_1k_1$
$2\cdot p+1=q_2k_2$
$\vdots$
$\frac{p-1}{2}p+1=q_nk_n$
$\frac{p-1}{2}=n$

Пусть q_i - максимальный простой делитель числа $(i\cdot p+1)$

Очевидно, что нет одинаковых q_i и q_j, ведь тогда
$i\cdot p+1=qk_1$ $jp+1=qk_2$ $\Rightarrow$ $(j-i)p=q(k_2-k_1)$ $\Rightarrow$ $k_1-k_2 \vdots p$
$\Downarrow$
$k_1>p$, но тогда
$py+1=qk>qp$
$y\geqslant q$, что означает нам победу!
$\left(\frac{p\cdot p}{2}>\frac{(p-1)p}{2}+1\right)$

4) Тогда все максимальные простые делители, либо различны, либо мы уже нашли подходящее разложение. Во втором случае — победа. Рассмотрим первый поподробнее.

Очевидно, что простых чисел от 1 до $\frac{p-1}{2}=n$ точно ~~меньше~~ не больше $\frac{n}{2}$, так как чётные числа

 МI 10-25

нам не подходят (чётные - простые, а двойку мы не рассматриваем).

Значит среди чисел от q_1 .. q_n есть хотя бы одно, которое больше нашего p_1 а это значит ~~из~~ из пункта (2), что мы победили! ~~либо из чисел~~

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

М-2-10-15

Фамилия Черников

Имя Кирилл

Отчество Андреевич

Класс 10

Территория г. Пермь

Образовательная организация школа №146

11 - 2 - 10 - 15

6	7	8	9	10	Σ
+вм	−п.о.	± гм	0к	−м	11
7+	0+	4		0к	

∞

№ 10.6

① Да. Последовательно на доску запишем новые выражения:

1) $\cos x$

2) $\cos x$ $\quad \cos x \cdot \cos x$ (умножим 1-ое выражение на первое выражение)

3) $\cos x$ $\quad \cos x \cdot \cos x$ $\quad \cos x + \cos x \cdot \cos x$ (сложим 1-ое и 2-ое выражения)

② при $x = \pi$ выражение $\cos x + \cos x \cdot \cos x = \cos \pi + \cos \pi \cdot \cos \pi =$
$= -1 + (-1)\cdot(-1) = 0$. что нам и требуется.

№ 10.8

1) Заметим, что если квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c, то по теореме Виета $\frac{b}{a} = -(x_1+x_2)$ $\quad \frac{c}{a} = x_1 x_2$, где x_1 и x_2 - корни его. Но так как $x_1 \in Z$, $x_2 \in Z$, то $\frac{b}{a} \in Z$ и $\frac{c}{a} \in Z \Rightarrow$ $b \vdots a$ и $c \vdots a$, при этом из условия задачи $a \in N, b \in N, c \in N$.

Значит необходимое условие для данной задачи заключается в том, что для выбранных коэффициентов a, b, c выполнялось, что $\boxed{\begin{matrix} b \vdots a \\ c \vdots a \end{matrix}}$

2) Назовём выбранные нами $3n$ последовательных натуральных чисел $y_1, y_2 \dots y_{3n}$: ~~как обычно~~

~~y_{3n} y_1+239~~ ~~$y_i = y_1 + \dots$~~

$$y_{3n} = y_1 + (3n-1) \qquad y_i = y_1 + (i-1)$$

$$y_1 < y_2 < y_3 \dots < y_{3n}$$

3) Как обычно, будем решать методом от противного. Пусть у нас всё получилось. Тогда заметим, что для некого a b и c должны иметь вид:

$b = k_1 a$, $c = k_2 a$, $k_1, k_2 \in N$, $k_1, k_2 > 1$

≥2a? ≥3a?

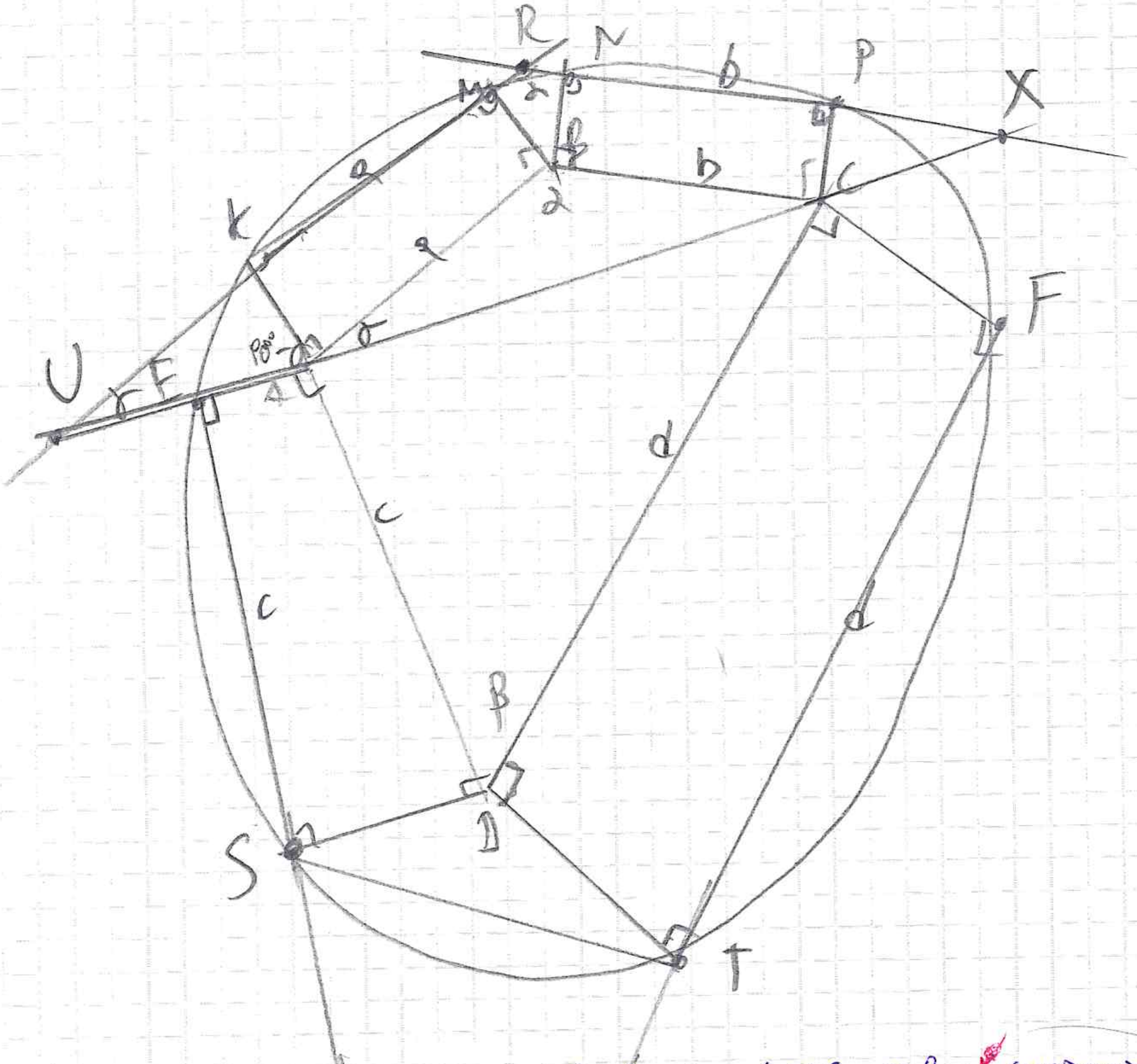
Значит одно из них хотя бы $2a$, а второе хотя бы $3a$, чтобы выполнялось условие делимости. Но тогда, если кого! ~~…~~ a-шек равно n, то максимальное из a-шек равно минимум $y_n = y_1 + (n-1)$. Значит один из других коэффициентов ~~…~~ b или c равно минимум $3y_n = 3(y_1 + (n-1)) = 3y_1 + 3(n-1)$. И этот коэффициент не должен превышать y_{3n}:

$$y_{3n} = y_1 + (3n-1)$$
$$y_{3n} \geq 3y_1 + 3(n-1)$$
$$y_1 + 3n - 1 \geq 3y_1 + 3n - 3$$
$$2y_1 \leq 2$$
$$y_1 \leq 1$$

Но так как ряд чисел - натуральный, то это означает, что первый член $y_1 = 1$, а из этого следует, что $y_i = i$, $y_{3n} = 3n$. Также следует, что все a-шки от 1 до n. почему!

4) Также заметим, что ~~…~~ простых чисел в промежутке от $n+1$ до $3n$ хотя бы 3. ~~…~~ для $n > 100$. ~~…~~ Однако простому числу мы можем сопоставить только 1. Но к 1 можно сопоставить не более 2-ух чисел. Значит мы получили противоречие. Вывод: нельзя. Или иначе говоря число чисел от $n+1$ до $3n$, которые не делятся ни на одно из чисел от 1 до n хотя бы 3.

1–7



1) если $ABCD$ – вписан, то $\Leftrightarrow \angle B+\angle D=\angle A+\angle C=180^\circ$ и наоборот. Значит достаточно доказать это. ok

2) $\angle ABC=\alpha$, тогда $\angle MBN=180^\circ-\alpha$, тогда $\angle MRN=\alpha$ ok

$\angle ADC=\beta$, тогда $\angle SDT=180^\circ-\beta$, тогда $\angle SHT=\beta$.

3) $RM\cdot RK=RN\cdot RP$

$RM(RM+a)=RN\cdot(RN+b)$

$HS\cdot HE=HT\cdot HF$

$\cancel{(HT+d)\cdot HT=}$ $HS\cdot(HS+c)=$

$=HT\cdot(HT+d)$

как степени точек ok.

при продлении RK и AC получим V

$RP \cap AC = X$ $\quad RK \cap AC = V$

тогда $\triangle ABC \sim \triangle VRX$ ок.

так как $\angle BAC = \angle XVC$

$\gamma = \angle BAC$

$\angle VAK = 90^\circ - \gamma$

$\Downarrow$

$\angle KVA = \gamma$

γ – общий

$\Downarrow$

$$\frac{VR}{RX} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{VR}{VX} = \frac{a}{AC} \qquad AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

аналогично делаем с HS и HT. получаем подобие треугольников аналогично. ок Затем, решая полученную систему уравнений, получаем $\alpha + \beta = 180^\circ$ $\Rightarrow$ $ABCD$ вписанный.

эти выкладки необходимо привести.

см. дальше

№10

1) Оценка: ~~...~~ очевидно, что $n \geq 5$. Действительно, если $n \leq 4$, то мы получаем 4 уравнения с минимум 6 неизвестными, ~~кот...~~ в частном случае 3 неизвестных и 2 уравнения для функции $f(x)$ и 3 неизвестных и 2 уравнения для функции $g(x)$, что нам не позволяет определить один из многочленов. ...

2) Полезно взять точку 0. $f(0)=c_1$ $g(0)=c_2$