Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

МI 9 - 15

Фамилия Ширинкин

Имя Артём

Отчество Владимирович

Класс 9

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ СОШ №146 с угл. изуч. матем., физики, информ."

МТ 9-15

1	2	3	4	5	Σ
+	±	+	−	−	
7	5	7	0	0	

Задача №9.1.

Ответ: да, может

Пример действий, приводящих к такому рез-ту:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
0м:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	
1м:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5	5	(разд X на 5 и 5)
2м:	1	5	0	4	5	6	7	8	9	5	5	(слож II и III)
3м:	1	5	4	4	5	6	7	8	5	5	5	(разд. IX на 4 и 5)
4м:	5	5	0	4	5	6	7	8	5	5	5	(слож I и III)
5м:	5	5	3	4	5	6	7	5	5	5	5	(разд VIII на 3 и 5)
6м:	5	5	0	4	5	6	10	5	5	5	5	(слож III и VII)
7м:	5	5	5	4	5	6	5	5	5	5	5	(разлож VII на 5 и 5)
8м:	5	5	5	0	5	10	5	5	5	5	5	(слож. IV и VI)
9м:	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	(разлож VI на 5 и 5)

Таким образом в каждой кучке поровну конфет. (Для удобства, при разложении я записываю новую ~~в~~ образовавшуюся кучку в ту, которая на тот момент не содержала конфет)

Задача №9.2.

Отсортируем числа по возрастанию.

$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$

Рассмотрим числа a_{n-2}, a_{n-1}, a_n. Найдем наибольшее возможное a_{n-2}, для этого минимизируем a_{n-1} и a_n. Тогда $a_{n-1} = a_{n-2}+10$, $a_n = a_{n-2}+20$

почему?

не минимум.

Для удобства во время решения уравнения примем a_{n-2} за x.

$x^2+(x+10)^2+(x+20)^2 < 3\cdot 10^6$

$3x^2+60x+500<3\cdot10^6$

$x^2+20x+166\frac{2}{3}<10^6$

$(x+10)^2+66\frac{2}{3}<10^6$

$(x+10)^2<10^6-66\frac{2}{3}$

$x+10<\sqrt{10^6-66\frac{2}{3}}$

$999<\sqrt{10^6-66\frac{2}{3}}<10^3$

Тогда наибольш возм значение $x+10=999$

$x=989$

$a_{n-2}=989$

$a_{n-1}=999$

$a_n=1009$

(В данной ситуации мы рассматриваем, что наибольшие числа положительные, если это не так, то n точно не наибольшее, тк мы можем дописать к этим числам их противоположные, и тк сумма квадратов наименьших 3 чисел меньше $3\cdot10^6$, то и сумма квадратов 3 наибольших тоже будет меньше $3\cdot10^6$)

Теперь чтобы найти наибольшее n, найдем кол-во чисел от 1009 до 0, разница между которыми 10 (чтобы максимизировать ~~~~ кол-во, нужно минимизировать разницу). Чтобы это сделать составим ряд с арифм прогрессией, где $a_1=1009$, $b=-10$

$a_i=1009-10(i-1)$

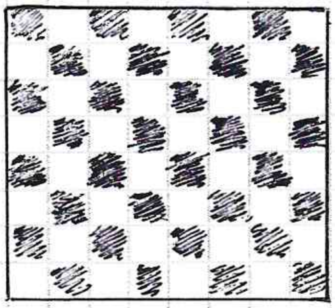
$1009-10(i-1)\geq0$

$i\leq101$

К каждому числу мы можем поставить еще число, противоположнее ему, а тк ~~последнее число~~ наименьш положит будет 9, то наиб отр будет −9 (разница между ними не меньше 10) => всего будет 202 числа

Ответ: $n = 202$.

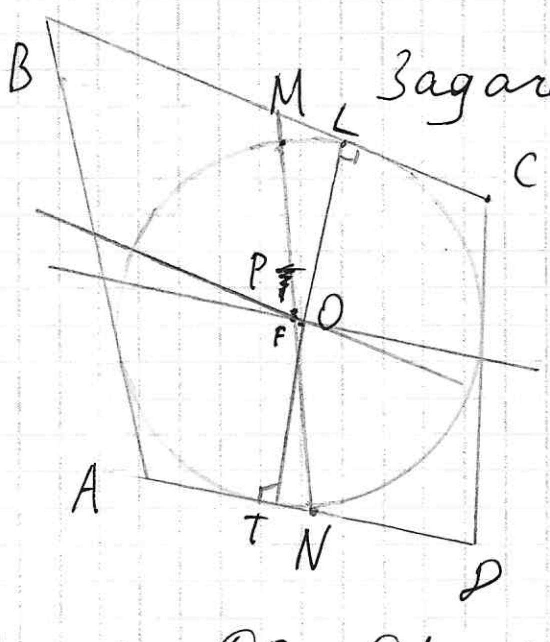
Задача № 9.3.



Каждым ходом Дима закрывает ровно 1 черную клетку, и, очевидно что если ни в 1 белой клетке нет крестика, а все черные уже заняты, он не может сделать ход. Тогда Коле нужно ставить крестики только в черные клетки. Тогда, после 32 ходов будет ход Димы, и все черные будут заняты, а в белых не будет ни 1 крестика => => Дима не сможет сходить и проиграет. Очевидно что до 32 хода Коля всегда может поставить крестик в черную клетку, тк каждый из игроков закрывает ровно 1 черную клетку, а тк закрыто было менее 32 черных клеток. Тогда Коля всегда побеждает.

Чем?

Задача 9.5.



Дано: $\omega_1(O; r)$,

$ABCD$ описан около ω_1

M – серед BC, N – серед AD

Д-ть: $MN \geqslant 2r$

Док-во: Др OL, OT – радиусы, $L \in BC$, $T \in AD$

ДП $OF \parallel AD$, $F \in MN$ (как радиус, пров в точку касания)

$OT \perp AD \Rightarrow OT$ – расстояние от пр OF до AD, $\Rightarrow$

$\Rightarrow FN \geq OT$ (OT – радиус окр) (тк $F \in OF$, $N \in AD$)

ДП $OP \parallel BC$, $P \in MN$

$OL \perp BC$ (как радиус, пров в точку касания) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OL$ – расст от OP до BC $\Rightarrow PM \geq OL$ (OL – радиус) (тк $P \in OP$, $M \in BC$)

(рав-во достиг когда $BC \parallel AD$)

$MN \geq FN + PM \geq OL + OT = 2r$

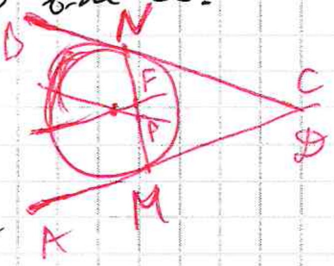
$MN \geq d$

$- PF$? а если $+ PF$? док-во

Ч. и т.д.

Такое ~~решение~~ не работает, если если O лежит на MN, но тогда и так очевидно, что $MN \geq d$, тк. диаметр полностью содержится отрезком MN тк. M и N лежат либо на окр, либо вне её.

а если



Задача № 9.4.

$p > 3$, p – простое.

$y < p/2$ $\quad y = \frac{p-1}{2}$

Предп, что есть такие $a, b > \frac{p-1}{2}$, что

$py + 1 = ab$

$ab \equiv 1 \pmod{y}$

$a > y$, $b > y \Rightarrow ab > y^2$

$ab = y^2 + ky + 1$ $\quad (k = (p+1)/2)$

$y^2 + ky + 1 - ab = 0$ $\quad$ тк a)

$D = k^2 + 4ab - 4 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + 4ab - 4$

$y_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{2}$

Тк $y > 0$, то $y = \frac{-k + \sqrt{D}}{2} = \frac{-(p+1)/2 + \sqrt{(p+1)^2 + 4ab - 4}}{2} = \frac{p-1}{2}$

$-(p+1)/2 + \sqrt{(p+1)^2 + 4ab - 4} = p - 1$

$-p - 1 + 2\sqrt{(p+1)^2 + 4ab - 4} = 2p - 2$

$3p - 1 = 2\sqrt{(p+1)^2 + 4ab - 4}$

$p = \frac{2\sqrt{(p+1)^2 + 4ab}}{3}$

Задача 9.4

При $y = (p-1)/2$, ~~$p(y)+1=$~~ $py+1=$

$= \frac{p(p-1)}{2}+1$ не существует таких целых $a, b > \frac{p-1}{2}$,

чтобы $\frac{p(p-1)}{2}+1 = ab$, т.к. тогда

$83 \cdot 41 + 1 = (2 \cdot 23) \cdot (2 \cdot 37)$

$ab \equiv 1 \pmod p$

$ab \equiv 1 \pmod{p-1}$

$a = \frac{p+k}{2}$

$b = \frac{p+h}{2}$ $(k, h < p)$, $(k, h$ - нечетн$)$

$ab = \frac{p^2+kp+hp+kh}{4}$

$p^2 + kp + hp + kh \equiv 4 \pmod{p-1}$
$\equiv 4 \pmod p$

$kh \equiv 4 \pmod p$
$= pt+4$

$p^2 + hp + hp + pt + 4 = 2p(p-1) + 4$

~~$p^2+kp+hp+pt=2p(p-1)$~~ $p+k+h+t = 2(p-1)$

~~$(p+k+h+t) = 2(p-1)$~~ $k+h+t = p-2$

~~$p-2 = k+h+t$~~

~~Тогда $k \le p-4$, $h \le p-4$~~

~~Найдем наиб от-ие зн $\frac{p+k}{2} \cdot \frac{p+h}{2}$~~

~~$\frac{2p-4}{2} \cdot \frac{2p-4}{2} = (p-2)^2$~~

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Региональный этап
3 - 4 февраля 2020 г.

М-2-9-10

Фамилия Ширинкин

Имя Артём

Отчество Владимирович

Класс 9

Территория г. Пермь

Образовательная организация МАОУ СОШ №146 с угл. изуч. матем, "физики, информ."

М2-9-10

Задача № 9.6

После старта Мише нужно пробежать полкруга, затем развернутся и побежать обратно. Очевидно, что после разворота он встретит Петю (I раз.) Затем Мише нужно бежать до старта. Когда Миша до него добежит, Коля пройдет $\frac{100}{102}$ окружности, тогда Мише нужно пробежать еще какое-то расстояние до встречи с Петей (II раз). После встречи, Пете до конца круга осталось бежать некоторое время t. Миша может пробежать по часовой стрелке, например, $t/1000$ времени, а затем развернуться т.к. Пете осталось бежать $0{,}999t \cdot V_{пети}$, а Мише $t \cdot V_{пети} + 0{,}001 t \cdot V_{пети} \cdot 1{,}02$, то время котор затр Петя до конца круга $0{,}999t$, а время котор Миша затратит $\frac{t \cdot (1{,}00102)}{1{,}02}$ => Миша еще догонит Петю, т.е. поравняется с ним 3 раза.

$$\frac{t \cdot (1{,}00102)}{1{,}02}$$

$$\frac{1{,}00102}{1{,}02} < 0{,}999 \Rightarrow$$

6	7	8	9	10	Σ
+	±	∓	−	−	
7	5	2	0	0	14
К.Р.	К.Р.	К.Р.			

Задача № 9.7

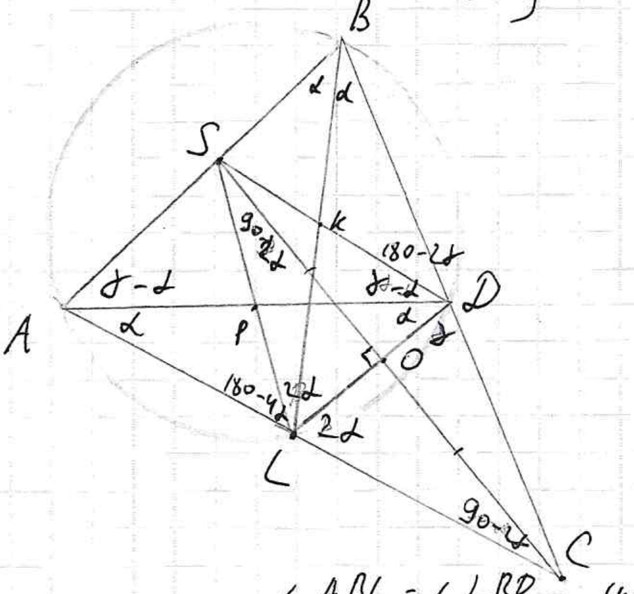
Предположим, что какой-то i-ый хамелеон — зеленый, т.е. он сказал правду. Тогда после его фразы кол-во зеленых не поменялось ⇒ если следующий тоже зеленый, то он назовет то же число, что и предыдущий. Но все назвали разные числа ⇒ рядом с любым зеленым нет других зеленых (изначально). Тогда изначально было не больше 1010 зел хамелеонов.

почему нельзя [illegible] больше?

Пример: 1-ый говорит число 1010, тогда каждый второй после него говорит число на 1 большее, т.к. между ними говорил коричневый, котор. стал зеленым. Тогда коричневые назовут числа от 1 до 1009, а т.е. обязательно соврут, а зеленые от 1010 до 2019 и все скажут правду.

Ответ: 1010.

Задача № 9.8



$\angle ABL = \angle LBD$ (по оп бис)

Решение: $\angle ABL = \angle ADL$ (как опир на 1 дугу)

$\angle DBL = \angle DAL$ (как опир на 1 дугу)

$\angle DLC = \angle DLS$ {тк $SO = CO$, $LO \perp SC \Rightarrow \triangle SLC$ - равноб} LO - биссект.

$\angle CSL = 90 - \beta = \angle LCO$

$\angle LDC = \gamma = \angle SDL$

$\angle BDS = 180° - 2\gamma$ (смежн) $180 - 2\gamma + 2\alpha$

$\angle SKB = \cancel{\ldots}$ (внешн)

$\angle BYK = \cancel{\ldots}$ $\cancel{\ldots}$ $2\gamma - 2\alpha$

$\angle DSC = \cancel{\ldots} = 90 - \gamma = \angle DCS$

$\angle ASL = \cancel{\ldots}$

$\cancel{\ldots}$

$\angle \cancel{\ldots} + \angle SKL$ $\angle ACS = 180° - 2\beta$

$\angle SAD = 180 \cancel{-(180° + 2\beta - \ldots - \beta - 2\gamma + \alpha)} =$ $\angle \cancel{SPA} = \cancel{(180° - 2\beta + \alpha)}$

$= \cancel{\ldots} - 2\alpha$ $\angle SPA = 180° - 2\beta + \alpha$

$\angle SBL = 90 - \beta + 90 - \gamma + 2\gamma - 2\alpha = 180 + \gamma + 2\alpha - \beta$

$\angle ASL = \beta + 2\alpha - \gamma$

$\angle SAD = \beta + \gamma - 3\alpha$

$\triangle ABD$: $\angle BAD + \angle ABD + \angle ADB = \beta + \gamma - 3\alpha + 2\alpha + \cancel{180} - \cancel{2\gamma} + \cancel{\gamma} - \alpha$

$- \cancel{180} = 0$ $\beta = 2\alpha$ V

S

$\angle HLD = 2\alpha$ $=$ $\angle DLC$

При $\alpha \geq 45°$, $\angle LSD \leq 0°$, что невозможно (если меньше, то невозм; если равно то $L \in SC \Rightarrow A$ и S совпад что невозм по усл)

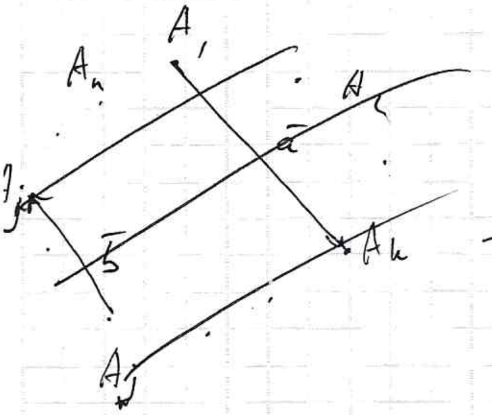
Тогда α точно меньше $45°$

Ответ: $\angle ABC < 90°$

Задача 9.9.

~~Заметим, что диагональ это сумма векторов~~

~~Заметим, что вектор из начала диагонали в конец диагонали — это сумма векторов сторон.~~



~~$\overline{A_1A_k} = \overline{A_1A_2} + \ldots + \overline{A_{k-1}A_k} = \bar{a}$~~

~~$\overline{A_iA_j} = \overline{A_iA_{i+1}} + \ldots + \overline{A_{j-1}A_j} = \bar{b}$~~

~~Предп, что $\overline{A_1A_k} \parallel \overline{A_iA_j}$~~

~~$\bar{a}$ $\bar{b}$~~

~~$X_a = X_1$~~

~~$Y_a = Y_1$~~

~~$X_b = X_2$~~

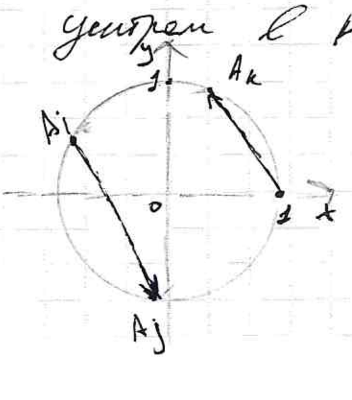
~~$Y_b = Y_2$~~

~~$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$~~

~~$X_{\overline{A_1A_2}} + X_{\overline{A_2A_3}} + \ldots + X_{\overline{A_{k-1}A_k}} = X_1$~~ ~~$Y_{\overline{A_1A_2}} + \ldots + Y_{\overline{A_{k-1}A_k}} = Y_1$~~

~~$X_{\overline{A_iA_{i+1}}} + \ldots + X_{\overline{A_{j-1}A_j}} = X_2$~~ ~~$Y_{\overline{A_iA_{i+1}}} + \ldots + Y_{\overline{A_{j-1}A_j}} = Y_2$~~

Впишем начальный многоуг. в окружность с центром в начале координат и радиусом 1.



A_1 расположим в точке $(1;0)$ и расставим остальные точки против часовой.

~~Предп A_k попала в 1 четверть. Тогда вектор A_iA_j~~

Предположим, что в каком-то многоуг-ке

~~Проведем вектор A_1A_k и вектор A_iA_j~~

~~$A_1A_k \parallel A_iA_j \Rightarrow$~~

~~на дуге A_kA_i и на дуге A_jA_1 кол-во вершин многоугольника отличается не больше чем на 1. Если~~

~~Расстояние от A_k до A_i (на окр~~ если $A_iA_j \parallel A_kA_1$, то

дуга A_kA_i по длине равна A_jA_1, т.е. на них расположено равное кол-во вершин (тк. все вершины находятся на одинаковом расстоянии друг от друга) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в многоуг-ке $A_1A_2A_3 \ldots A_kA_iA_{i+1} \ldots A_j$ общая. четное кол-во вершин, но по предп в нем нечетн $\Rightarrow$ ~~мы разбивали~~

$\Rightarrow$ предп неверно $\Rightarrow$ хорошего многоуга оказаться не может

$A_1A_2 \ldots A_kA_i \ldots A_j$ $A_1A_k \parallel A_iA_j$ этот многоуг. не обязательно тот, что в условии

(при этом в этом многоуге нечетн кол-во вершин)

Ответ: нет, не может.

Задача №9.10

Зафиксируем сумму, заметим что при сближении чисел сумма уменьшается тогда наименьшей она будет при $x_1 = x_2 = \ldots = x_9$. (Тогда она равна $0 \Rightarrow$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \ldots + \frac{x_9 - x_2}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_1^2} \geq 0$$

не доказано