Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 15—21 апреля 2017 года

Первый тур. Задачи

Дата написания	**16 апреля 2017 г.**
Количество заданий	**5**
Сумма баллов	**150**
Время написания	**240 минут**

Решения

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики или подготовке к олимпиадам. От участников не требуется слишком подробного решения; в любом случае самое важное при оценке — понимает ли участник, как решается задача.

Самая важная вещь на Олимпиаде — не победа, а участие, так же как в жизни важен не триумф, а борьба. Имеет значение не то, что вы завоевали, а то, как вы бились.

— Пьер де Кубертен

Задача 1. Спрос рождает предложение

Фирма «Мориарти» является монополистом на региональном рынке свежих слив. Функция спроса на сливы в регионе имеет вид $q_d(p) = 180 - p_d$ (при ценах выше 180 потребители ничего не покупают), где p_d — цена на региональном рынке. Фирма владеет одним заводом, издержки производства слив на котором зависят от объема выпуска следующим образом:

$$TC_1(q_1) = \begin{cases} q_1^2 + 12q_1 + 2017, & \text{если } q > 0; \\ 0, & \text{если } q = 0. \end{cases}$$

У фирмы есть возможность открыть второй завод, функция издержек на котором будет такой же, как на первом (объем выпуска на втором заводе обозначим за q_2).

а) **(10 баллов)** Является ли открытие второго завода оптимальным решением с точки зрения максимизации прибыли?

б) **(20 баллов)** Фирма «Мориарти» рассматривает возможность выхода на рынок соседнего региона. Если она это сделает, то останется монополистом в своем регионе, а в соседнем сможет продать любой объем выпуска q_f по цене 120. Стоит ли фирме выходить на новый для нее рынок? Если да, то стоит ли при этом открывать второй завод?

Решение

Сначала найдем общую функцию издержек для случая открытия второго завода, то есть при $Q = q_1 + q_2$, $q_2 > 0$. При оптимальном распределении выпуска между заводами (если на обоих заводах производится ненулевое количество товара) предельные издержки на двух заводах должны быть равны. Если это будет не так, то достаточно переместить небольшой объем производства с того завода, где издержки производства последней единицы больше, туда, где они меньше, и издержки уменьшатся при неизменной выручке.

Значит, должно быть выполнено

$$MC_1(q_2) = MC_2(q_2),$$
$$2q_1 + 12 = 2q_2 + 12,$$
$$q_1 = q_2 = Q/2.$$

Составим функцию общих издержек от суммарного объема выпуска:

$$TC(Q) = TC_1(q_1) + TC_2(q_2) = 2 \cdot \left((Q/2)^2 + 12(Q/2) + 2017\right) = Q^2/2 + 12Q + 4034. \tag{1.1}$$

Таким образом, в обоих пунктах задачи фирма может выбирать между функцией издержек, которая дана в условии, и функцией издержек (1.1).

а) В случае использования фирмой только **одного завода** ($q_1 = Q > 0$) функция прибыли имеет вид

$$\pi(Q) = (180 - Q)Q - Q^2 - 12Q - 2017.$$

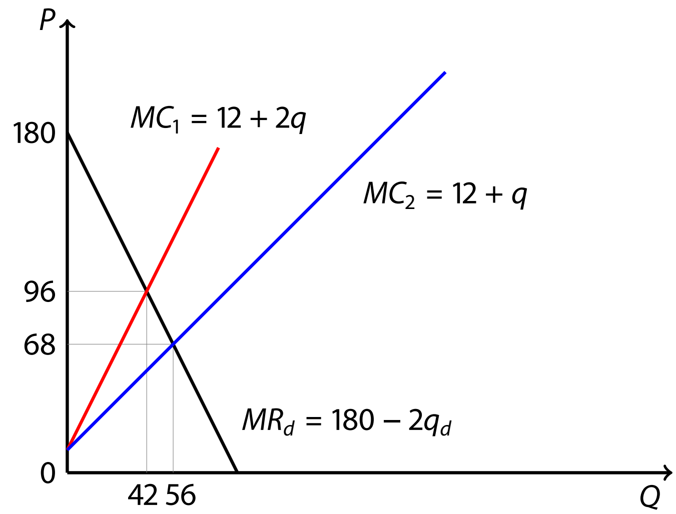
Это парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $Q^\star = 42$. Максимальная прибыль при этом равна 1511.

В случае использования фирмой **двух заводов** ($q_1 = q_2 = Q/2 > 0$) функция прибыли имеет вид

$$\pi(Q) = (180 - Q)Q - Q^2/2 - 12Q - 4034.$$

Это парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $Q^{\star\star} = 56$. Максимальная прибыль при этом равна 670.

Максимальная прибыль с одним заводом больше, поэтому второй открывать не нужно.



б) С появлением второго рынка фирме нужно решить две задачи:

1) Как распределять произведенный выпуск между рынками?

2) Сколько всего производить?

Ответ на первый вопрос получается при приравнивании предельной выручки на двух рынках. Действительно, каждую единицу товара нужно продавать там, где она сильнее увеличивает выручку. Предельная выручка на внутреннем рынке $MR_d(q_d) = 180 - 2q_d$ убывает и при малых значениях q_d больше 120 (предельной выручки на внешнем рынке). Значит, продавать товар на внутреннем рынке нужно до тех пор, пока не будет выполнено $180 - 2q_d = 120$, а затем нужно переключиться на внешний, так как выручка на внутреннем будет больше. Отсюда получаем $q_d^\star = q_d^{\star\star} = 30$, а оптимальная цена внутреннего рынка равна 150 (этот результат не зависит от того будет ли фирма выходить на внешний рынок, осуществляя производство продукции только на одном или одновременно на двух заводах). Итак, фирма получит на внутреннем рынке выручку, равную 4500.

Ответить на второй вопрос можно, приравняв предельную выручку, равную цене внешнего рынка, к общим предельным издержкам. Поскольку предельные издержки (как в случае одного, так и в случае двух заводов) возрастают, нужно продавать товар, пока предельный доход их превышает, то есть пока прибыль увеличивается. Получаем:

Один завод:

$$MC = 2Q + 12;$$
$$120 = 2Q + 12;$$
$$Q^{\star} = 54;$$
$$q_f^{\star} = 54 - 30 = 24;$$
$$TR_f^{\star} = 120 \cdot 24 = 2880;$$
$$\pi^{\star} = 4500 + 2880 - 54^2 - 12 \cdot 54 - 2017 =$$
$$= 1799.$$

Два завода:

$$MC = Q + 12;$$
$$120 = Q + 12;$$
$$Q^{\star\star} = 108;$$
$$q_f^{\star\star} = 108 - 30 = 78;$$
$$TR_f^{\star\star} = 120 \cdot 78 = 9360;$$
$$\pi^{\star\star} = 4500 + 9360 - 108^2/2 - 12 \cdot 108 - 4034 =$$
$$= 2698.$$

Прибыль в случае одного завода меньше, чем прибыль в случае двух заводов ($1799 < 2698$). Значит, открывать второй завод выгодно. При этом максимальная прибыль больше той, что была в пункте **а)**, так что выход на второй рынок был оправдан.

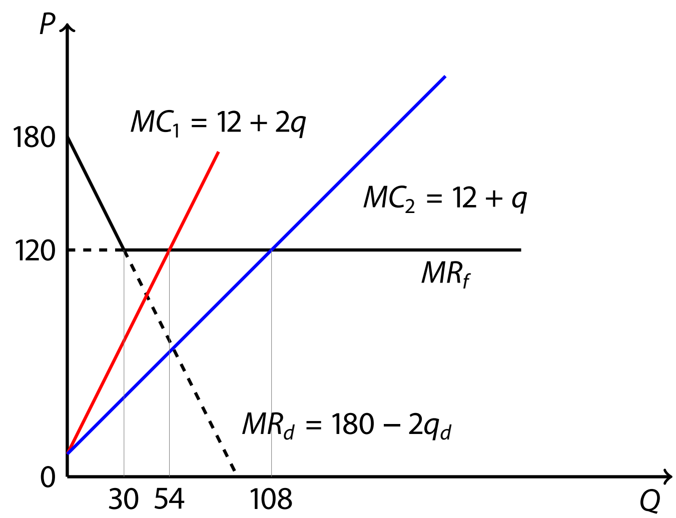


Схема оценивания

Штрафы:

- Использование частных производных без достаточного обоснования — *до 2 баллов*
- *1 балл* за отсутствие обоснования максимума для параболы
- Арифметические ошибки — *1 балл* за каждую. Если ошибка существенна, обнулялись баллы за те пункты, на которые она могла повлиять, даже если выводы были правильными

а) • расчёт прибыли для одного завода — *3 балла*

- обоснование того, что для двух заводов объемы производства на них будут одинаковы — *3 балла*
- расчёт прибыли для двух заводов — *3 балла*
- вывод о нецелесообразности открытия второго завода — *1 балл*

б) • обоснованный любым способом ответ на вопрос, стоит ли выходить на мировой рынок — *5 баллов*

- определение объема продаж для внутреннего рынка — *6 баллов*.
- расчёт прибыли для одного завода — *2 балла*
- расчёт прибыли для двух заводов — *5 баллов*
- вывод о целесообразности открытия двух заводов — *2 балла*

Альтернативные критерии для пункта **б)**:

- построение функции прибыли для одного завода, работающего на двух рынках, определение оптимального объёма производства и прибыли — *8 баллов*
- построение функции прибыли для двух заводов, работающих на двух рынках, определение оптимального объёма производства и прибыли — *8 баллов*
- вывод о целесообразности экспорта — *2 балла*
- вывод о целесообразности открытия двух заводов — *2 балла*

Задача 2. В чём согласны экономисты

Исследователи Дэн Фуллер и Дорис Гейде-Стевенсон проанализировали результаты опроса о ключевых проблемах экономической политики, проведенного в 2011 году среди 2854 профессиональных американских экономистов.[1] Среди респондентов были как представители академического сообщества, так и экономисты, работающие на государство, а также представители бизнеса. Каждому из них предлагалось высказать свое отношение к 44 утверждениям: в целом согласиться, согласиться при определенных оговорках или выразить несогласие.

Ниже приводятся два утверждения, с которыми оказались в той или иной степени согласны больше всего опрошенных. (В скобках указана доля опрошенных, выразивших полное согласие и согласие с оговорками соответственно.) Прокомментируйте каждое из этих утверждений: объясните, почему многим экономистам оно кажется справедливым, а также почему, тем не менее, не все согласны с ним безоговорочно. Будьте лаконичны: ответ относительно каждого утверждения может уместиться в 3—5 предложений.

а) (15 баллов) *Гибкие и плавающие валютные курсы помогают эффективно регулировать международную валютную систему* (69,9 % + 25,9 %).

б) (15 баллов) *Если правительство хочет сбалансировать государственный бюджет, то лучше соблюдать баланс на протяжении экономического цикла, а не каждый год* (66,4 % + 22,5 %).

Решение

а) Возможные аргументы в пользу утверждения:

- **Финансовая стабильность.** Поддержание фиксированного валютного курса зачастую требует от страны существенных валютных резервов, что отвлекает ресурсы от других целей. Если резервы будут исчерпаны (например, из-за спекулятивных атак), то ЦБ будет вынужден осуществить девальвацию национальной валюты, которая в таких условиях часто оказывается очень резкой, что само по себе сказывается на экономике хуже, чем более плавное приспособление в условиях плавающих курсов.
- **Торговый баланс.** Гибкие валютные курсы способствуют установлению равновесного торгового баланса. Если в какой-то стране возникает дефицит торгового баланса (превышение импорта над экспортом), то есть спрос на её продукцию становится мал, то спрос на её национальную валюту также уменьшится, в результате равновесный валютный курс упадет, товары этой страны подешевеют относительно иностранных, что приведет к росту величины экспорта и снижению величины импорта.
- **Самостоятельная монетарная политика.** В условиях гибких валютных курсов центральные банки могут проводить самостоятельную монетарную политику (например, таргетировать инфляцию) и лучше стабилизировать экономику в ответ на внутренние шоки.

Возможные аргументы против утверждения:

[1] Fuller, Dan, and Doris Geide-Stevenson. "Consensus Among Economists—An Update." *The Journal of Economic Education* 45.2 (2014): 131-146.

- **Борьба с инфляцией.** В развивающихся странах привязка курса национальной валюты к валюте страны с низкой и стабильной инфляцией может быть хорошим инструментом для снижения внутренней инфляции.
- **Стабильность относительных цен.** Если резервы ЦБ достаточно велики, то фиксированный курс может снижать изменчивость относительных цен импортируемых и экспортируемых товаров, то есть снижать уровень неопределенности для фирм и домашних хозяйств. Это хорошо, например, потому, что снижение уровня неопределенности может способствовать росту инвестиций.

б) Возможные аргументы в пользу утверждения:

- Согласно кейнсианскому подходу, важно не состояние государственного бюджета, а проведение стабилизационной фискальной политики: увеличение государственных расходов и сокращение налогов в период спада для стимулирования деловой активности или сокращение государственных расходов и увеличение налоговых поступлений в период перегрева экономики для снижения деловой активности. В такой ситуации попытка сбалансировать государственный бюджет ежегодно может привести либо к еще большему перегреву экономики (при подъеме доходы от налогов увеличиваются за счет действия автоматических стабилизаторов, следовательно, для стабилизации бюджета правительство должно увеличить государственный расходы, что только усилит перегрев экономики), либо к еще более глубокому спаду (аналогичная логика).
- Другое важное соображение заключается в ограничении **осуществимости ежегодного балансирования**. Даже если представить, что правительство несмотря ни на что задалось целью сбалансировать ежегодный бюджет, то нужно учитывать, что государственные расходы невозможно сократить ниже какой-то значительной положительной величины (среди прочего, из-за социальных расходов), а налоговые поступления ограничены сверху (из-за пика кривой Лаффера). Дополнительными сложностями может стать отсутствие политической решимости сократить некоторые статьи государственных расходов (например, военные расходы), а также невозможность собрать требуемый объем налогов за короткий промежуток времени.

Возможные аргументы против утверждения:

- **Трудность прогнозирования.** Чтобы балансировать бюджет в течение цикла, нужно уметь прогнозировать будущие стадии цикла (их продолжительность и амплитуду). А это может быть затруднительно.
- **Асимметричность колебаний.** В реальности по своей продолжительности и глубине спады часто значительно больше, чем подъемы, и покрыть бюджетные дефициты за счет излишков вряд ли удастся.
- **Плохие стимулы для правительства.** Смены правительств (в результате выборов) могут не совпадать со сменой бизнес-циклов. Поэтому у текущего правительства могут быть стиму-

лы допускать дефицитный бюджет, так как расплачиваться с долгами придется уже другому правительству.

Схема оценивания

В каждом пункте требуется хотя бы один обоснованный аргумент в пользу истинности утверждения и хотя бы один обоснованный аргумент, почему с утверждением можно согласиться лишь с оговорками.

Если есть аргумент (или аргументы) только в одну сторону, то пункт оценивается в 8 баллов.

Задача 3. Списывать — норма?

Распространение культурных норм — сложный процесс, который, по мнению некоторых исследователей, основан на копировании признаков окружающих. Причем часто этот процесс идет неосознанно, и распространенным ответом, например, на вопрос *«Почему ты говоришь с таким акцентом?»* будет *«тут все так говорят»*, а не *«я рассмотрел ряд возможных акцентов и понял, что наибольший выигрыш мне приносит именно этот»*. Такой выбор вполне может оказаться рациональным, при том что сама норма может быть неэффективной, но устойчивой.

В этой задаче мы исследуем распространение нормы «списывать» в школьной среде. Будем считать, что есть два типа школьников: те, кто честно готовятся к проверочным работам и не списывают, а также те, кто не готовятся и списывают со шпаргалок.

I ↓ \ II →	Честный	Списывает
Честный	10, 10	–10, 5
Списывает	5, –10	0, 0

Если *два честных школьника сидят рядом* на проверочной работе, то они честно пишут эту работу и даже получают удовольствие от своей честности. Будем считать, что каждый из них в этом случае получает выигрыш (полезность), равный 10. Если же *два списывающих школьника сидят рядом*, то, во-первых, у них получается хуже написать, а во-вторых, они нервничают, мешают друг другу и привлекают внимание, из-за чего выигрыш каждого равен 0. В случае, когда *списывающий и честный сидят рядом*, списывающий получает выигрыш 5, так как списал работу и не сильно привлекал к себе внимание, а честный получает выигрыш (–10), так как не мог ничего нормально решать из-за вопиющей несправедливости, которая творилась рядом с ним.

Учитель борется со списыванием путем постоянного пересаживания школьников. В классе 22 ученика, и в течение месяца (21 учебный день) каждый успевает посидеть с каждым одноклассником за партой по одному разу. По итогам месяца каждый школьник сравнивает полученный суммарный выигрыш с тем выигрышем, который он получил бы, если бы весь месяц вел себя по-другому (с учетом того, как вели себя одноклассники). Если в прошлом месяце ученик списывал, а, будучи честным, получил бы выигрыш строго больше, в следующем месяце он не будет списывать. Если он в прошлом месяце был честным, то выбор нечестного поведения связан с моральными издержками, так что он переключится, только если общий выигрыш от переключения в прошлом месяце вырос бы более чем на 15. Если эти условия не выполняются, то ученик сохраняет свой тип на следующий месяц.

а) (15 баллов) Пусть в первом месяце в классе было X честных и Y списывающих школьников (X и Y могут принимать любые целые неотрицательные значения, такие что $X + Y = 22$). Как будет меняться количество школьников каждого типа в следующие месяцы?

б) (5 баллов) Назовем *равновесным классом* такой, в котором никто из школьников по итогам месяца не станет менять свой тип. Предположим, что класс был равновесным, когда один из учеников (назовем его Вовочка) на один месяц поменял свой тип ни с того ни с сего (после этого месяца он снова станет обычным учеником, рационально сравнивающим выгоды). Как будет меняться количество школьников каждого типа в следующие месяцы?

в) (10 баллов) Если вы правильно решили пункты **а)** и **б)**, то у вас должно было получиться, что существует несколько типов равновесных классов, причем один из них является самым предпочтительным для каждого школьника. Предположим, учитель изначально знает, к какому типу принадлежит каждый школьник, и может составлять любой план рассадки на каждый день (необязательно делать так, чтобы каждый сидел с каждым в течение месяца). При каком минимальном значении X учителю удастся добиться, чтобы через конечное число месяцев класс оказался в предпочтительном равновесии? Считайте, что «вовочек» в классе нет, то есть все принимают решения так, как описано в задаче.

Решение

а) 1) Предположим, в классе есть честные школьники, то есть $X > 0$. В первом месяце каждый такой школьник $(X-1)$ раз встретился с себе подобными (и каждый раз получил 10) и Y раз — со списывальщиками (и каждый раз получил -10). Таким образом, его выигрыш был равен

$$U_ч = 10(X-1) - 10Y.$$

Если он в первом месяце следовал бы другой норме, то честных школьников стало бы $(X-1)$, а списывающих — $(Y+1)$, и выигрыш переключившегося школьника был бы равен $(5(X-1)-15)$ (с учетом моральных издержек). Честный школьник останется честным, если

$$10(X-1) - 10Y \geqslant 5(X-1) - 15,$$

то есть (с учетом того, что $Y = 22-X$) $X \geqslant 14$. Если же $X < 14$, то есть честных школьников достаточно мало, то все они переключатся на нечестное поведение в следующем месяце.

2) Предположим, в классе есть списывающие школьники, то есть $Y > 0$. В первом месяце каждый такой школьник $(Y-1)$ раз встретился с себе подобными (и каждый раз получил 0) и X раз — с честными (и каждый раз получил 5). Таким образом, его выигрыш был равен

$$U_с = 5X.$$

Если он в первом месяце следовал бы другой норме, то честных школьников стало бы $(X+1)$, а списывающих — $(Y-1)$, и выигрыш переключившегося школьника был бы равен $(10X - 10(Y-1))$. Списывающий школьник останется списывающим, если

$$5X \geqslant 10X - 10(Y-1),$$

то есть (с учетом того, что $Y = 22-X$) $X \leqslant 14$. Если же $X > 14$, то есть честных школьников достаточно много, то в следующем месяце все нечестные станут честными.

Из предыдущего рассуждения следует, что если в классе ровно 14 честных школьников, то их количество будет стабильно — никто не захочет переключаться. Если же честных больше 14, то уже в следующем месяце все станут честными (а дальше ничего не будет меняться, так как 22 тоже больше 14). Если честных меньше 14, то во втором месяце все будут списывать (а дальше ничего не будет меняться, так как 0 тоже меньше 14).

б) В предыдущем пункте мы выяснили, что есть три типа равновесных классов: $X = 0$, $X = 14$ и $X = 22$.

Если класс находился в равновесиях $X = 0$ или $X = 22$, то ничего не произойдет: переключения Вовочки недостаточно, чтобы развернуть соответствующие неравенства.

Если класс находился в равновесии $X = 14$ и Вовочка был честным школьником, то его переключение на нечестную норму сделает $X < 14$. В следующем месяце все честные школьники станут списывальщиками, все списывальщики останутся списывальщиками и класс навсегда окажется в равновесии $X = 0$.

Если класс находился в равновесии $X = 14$ и Вовочка был списывальщиком, то его переключение на честную норму сделает $X > 14$. В следующем месяце все списывальщики станут честными, все честные останутся честными и класс навсегда окажется в равновесии $X = 22$.

в) Самое предпочтительное равновесие — то, в котором $X = 22$, то есть все школьники честные. В этом случае каждый школьник каждый день получает максимально возможный выигрыш, так что любая другая конфигурация хуже по крайней мере для кого-то.

Как стимулировать списывальщика становиться честным? Как следует из расчетов пункта **а)**, нужно делать так, он сидел с честным школьником не менее 15 дней из 21. При этом злоупотреблять этим не стоит: если честный школьник будет слишком часто (больше 7 дней в месяц) сидеть с нечестными, он «заразится» списыванием от них.

Если в классе нет честных школьников ($X = 0$), то пересаживание не поможет: никто из них никогда не будет сидеть с честным, так что не изменит свой тип. Также не получится достичь хорошего равновесия, если $X = 1$: единственный честный школьник в любом случае весь месяц просидит со списывальщиками и уже в следующем месяце наступит самое плохое равновесие.

Если $X = 2$, то увеличить количество честных учеников также не получится. Для того чтобы «обратить» хотя бы одного списывальщика, нужно, чтобы как минимум 15 дней с ним сидел кто-то из двух честных школьников. Значит, эти 15 дней честные не будут сидеть друг с другом. Получается, что друг с другом они будут сидеть не более 6 дней, так что оба они превратятся в списывальщиков, и мы вернемся к ситуации $X = 1$.

А вот при $X = 3$ хорошего равновесия достичь можно. Покажем, как из трех честных школьников через месяц получить четыре. Нужно сделать рассадку так, чтобы каждый из трех честных школьников провел с одним и тем же нечестным по 5 дней, при этом остальные двое будут сидеть друг с другом. Тогда после 15 дней нечестный станет честным. Чтобы честные тоже не сменили тип, нужно, чтобы в оставшиеся 6 дней по 2 дня вместе сидели все возможные пары:

$(1,2)$, $(2,3)$ и $(1,3)$. Тогда каждый честный школьник проведет с себе подобными по 14 дней, чего как раз достаточно, чтобы не сменить тип.

Дальше каждый месяц действуем следующим образом. Действуя аналогично приведенной выше схеме, три школьника превратят одного списывающего в честного, при этом сами останутся честными. Каждого из оставшихся честных школьников будем сажать с одним и тем же одноклассником. Если он будет сидеть целый месяц с честным, то они оба останутся честными. Если он будет сидеть целый месяц со списывающим, то через месяц они поменяются типами. В обоих случаях общее число честных школьников по итогам месяца увеличится на 1. Продолжить превращать списывальщиков в честных одного за другим, пока все в классе не станут честными.

Схема оценивания

а) • Вывод условия смены типа честным школьником ($X < 14$) — **5 баллов**

- Вывод условия смены типа списывающим школьником ($X > 14$) — **5 баллов**
- Если условия не были выведены, то можно было получить **по 1 баллу** из 5 за выписанный выигрыш честного и списывающего школьника
- Свод условий и выписывание ответа — **5 баллов**
- Если задача решалась перебором и перебор был неполным, то можно было получить (в зависимости от степени неполноты) **до 3 баллов** за правильно разобранные случаи каждого из трех типов

б) • Проанализированы случаи $X = 22, Y = 0$ и $X = 0, Y = 22$ — **по 1 баллу** за каждый из случаев

- Проанализирован случай $X = 14, Y = 8$ — **по 1 баллу** за каждый из двух случаев типов Вовочки
- Все собрано правильно в ответ — **1 балл**

в) • Доказано, что если честных школьников не более 2, то ничего не получится — **4 балла**

- Если с 2 школьниками доказательство не удалось, то **1 балл** (в сумме) можно было получить за разбор случаев $X = 0$, $X = 1$
- Показано, что из $X = 3$ можно сделать 4 честных школьников — **3 балла**
- Показано, что при 4 и более честных школьников можно увеличивать число честных школьников каждый месяц как минимум на 1 — **3 балла**

Задача 4. Международная торговля и рынок труда

В стране XY производятся два товара — Икс и Игрек; в их производстве используются два фактора — труд и капитал. Общий запас труда в стране (величина рабочей силы) составляет 240 единиц, а капитала — 120 единиц. Для производства X единиц Икса нужны X единиц труда и $X^2/120$ единиц капитала. Для производства Y единиц Игрека нужны $2Y$ единиц труда и Y единиц капитала. Товары Икс и Игрек потребляются только в комплектах, состоящих из одной единицы Икса и двух единиц Игрека. Экономика страны работает так, чтобы максимизировать количество потребляемых комплектов.

а) (8 баллов) Постройте кривую производственных возможностей страны, указав координаты всех ключевых точек. Определите, сколько комплектов будет потребляться в стране в условиях закрытой экономики. Определите уровень безработицы в стране (долю рабочей силы, которая не используется в производстве).

б) (8 баллов) Допустим, страна открывается мировому рынку, на котором единицу Икса можно обменять (в любую сторону) на две единицы Игрека. Определите, какая комбинация товаров будет производиться в стране и сколько комплектов будет потребляться. Определите уровень безработицы в стране.

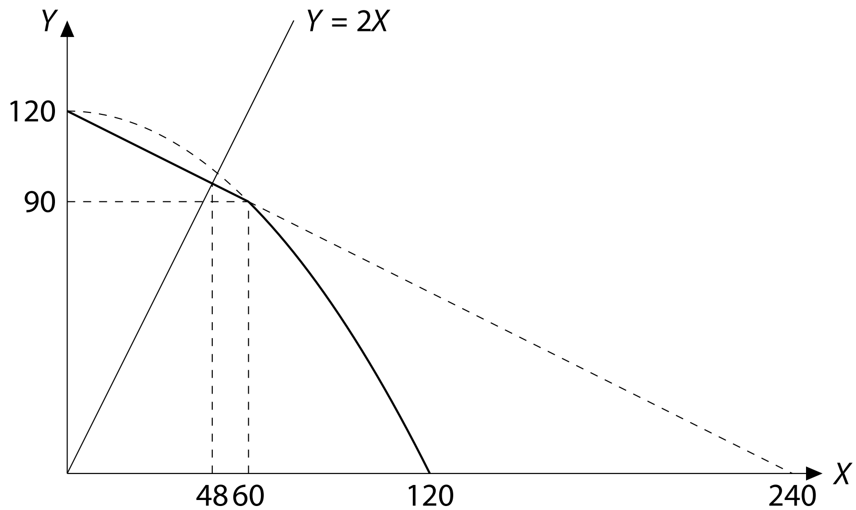
в) (2 балла) Как известно, безработица влечет за собой долгосрочные потери благосостояния, связанные с утратой квалификации работников, отчаянием и подобными эффектами. Определим величину общественного благосостояния как разность между количеством потребляемых комплектов и величиной $c \cdot U$, где U — *количество* безработных единиц труда, а c — потери от безработицы в расчете на одну безработную единицу труда. При каком минимальном значении c величина общественного благосостояния в стране не увеличится при открытии международной торговли? Обозначьте это значение за $c_{\min}$.

г) (12 баллов) Допустим, $c = c_{\min}$. Вместо того, чтобы рассматривать две крайности — открывать свободную торговлю или запрещать ее — государство может принять промежуточное решение: ввести тариф на импорт Игрека. После введения тарифа доля $t \in (0;1)$ ввезенных единиц Игрека будет изыматься; изъятые единицы Игрека государство затем частично обменивает на Икс на мировом рынке и отдает полученные комплекты потребителям. При этом экономические агенты при принятии решений не учитывают этот трансферт: равновесие в экономике устанавливается так же, как в пункте **б)**, как если бы пропорция обмена Икса на Игрек была $1 : (2(1-t))$.

Определите значение t, при котором общественное благосостояние максимально.

Решение

а) Обозначим количества произведенных товаров за X и Y. Тогда в силу ограничения на рабочую силу имеет место неравенство $X + 2Y \leqslant 240$. В силу ограничения на количество капитала имеет место неравенство $X^2/120 + Y \leqslant 120$. Множество доступных для производства наборов (X,Y) является пересечением множеств, заданных этими неравенствами и первой координатной четверти. «Верхняя» граница этого множества и даст искомую КПВ. Ее ключевые точки: $(0, 120)$, $(60, 90)$, $(120, 0)$. КПВ изображена на рисунке:



Кривая производственных возможностей страны и объем потребления в условиях закрытой экономики.

Для решения дальнейших пунктов нам пригодится аналитическая запись КПВ:

$$Y = \begin{cases} 120 - X/2, & X < 60; \\ 120 - X^2/120, & 60 \leqslant X \leqslant 120. \end{cases}$$

Количество потребленных комплектов будет определяться пересечением КПВ и луча $Y = 2X$. Легко определить, что пересечение будет происходить в точке $(48, 96)$, то есть потребляться будут 48 комплектов. В этой точке ограничение по труду выполнено как равенство. Иными словами, все единицы труда задействованы в производстве и уровень безработицы равен нулю.

б) Решение 1. Альтернативные издержки при производстве X единиц равны $1/2$ единиц Игрека при $X < 60$ и $120 - X^2/120)' = X/60$ единиц Игрека при $X > 60$. Заметим, что если страна находится в точке равновесия пункта а), мы можем увеличить производство Икса на небольшое Δ, отказавшись от $\Delta/2$ единиц Игрека. Произведенный Икс можно обменять на мировом рынке на 2Δ единиц Игрека, и итоге у страны будет больше Игрека, чем изначально, при таком же количестве Икса. Значит, страна сможет получить и больше комплектов, чем изначально (так как Y дополнительных единиц Игрека легко превратить в $Y/4$ комплектов).

(Уменьшать же производство Икса по сравнению с пунктом а) невыгодно, так как «меняя» Икс на Игрек внутри страны, двигаясь по КПВ влево, мы получим только $1/2$ Игрека за каждую единицу Икса, а на мировом рынке получим две единицы.)

Рассуждая таким образом, что стране выгодно наращивать производство Икса, пока альтернативные издержки этого (в терминах Игрека) меньше, чем количество дополнительных единиц Игрека, которое можно получить от обмена. Иными словами, стране нужно выбрать максимальный объем производства Икса, удовлетворяющий условию $X/60 \leqslant 2$. Получаем, что оптимальный объем производства Икса равен 120, и, соответственно, объем производства Игрека равен 0.

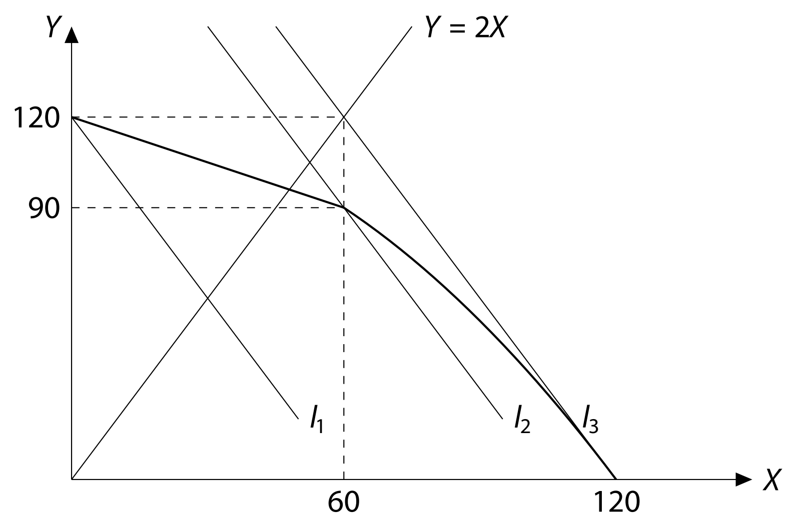
2 единицы Икса на мировом рынке можно превратить в комплект из единицы Икса и двух единиц Игрека, и значит 120 единиц можно превратить в 60 комплектов. На производстве Икса будет задействовано 120 из 240 единиц труда. Таким образом, уровень безработицы составит $50\ \%$.

Решение 2 является графическим аналогом Решения 1. Допустим, страна выбрала некую точку A на КПВ. Обмен товарами на международном рынке соответствует движению вдоль прямой, проходящей через A и имеющую наклон (–2). При этом обмен будет происходить до пересечения этой прямой с прямой $Y = 2X$. Например, если страна выберет точку $(0; 120)$, обмен будет соответствовать движению вдоль прямой l_1 на рис. ниже. Видим, что ее пересение с $Y = 2X$ лежит ниже КПВ, так что обмен не выгоден. Напротив, если страна будет производить комбинацию $(60; 90)$, можно обмениваться вдоль прямой l_2. Ее пересечение с $Y = 2X$ лежит выше КПВ, так что такой обмен увеличивает количество комплектов по сравнению с закрытой экономикой.

Проводя прямые с наклоном (-2) через точки с $X \geqslant 60$, видим, что итоговое потребление комплектов будет расти до тех пор, пока линия обмена не будет касаться КПВ, либо X не достигнет своего максимального значения, 120. В данном случае наклон КПВ в точке равен $-X/60$, и поэтому КПВ касается линии обмена, когда $-X/60 = -2$, то есть $X = 120$. Таким образом, потребление комплектов максимально, если страна будет производить только Икс, в объеме 120 единиц.

При этом обмен будет происходить вдоль прямой l_3, имеющей уравнение $Y = 240 - 2X$. Пересекая ее с прямой $Y = 2X$, получаем, что количество потребляемых комплектов равно 60.

При этом в производстве задействованы только 120 единиц труда из 240, так что уровень безработицы равен 50 %.



Установление равновесия при свободной торговле.

Решение 3. Допустим, страна решила произвести X единиц Икса и $Y(X)$ единиц Игрека, где $Y(X)$ — уравнение КПВ. Тогда, чтобы достичь пропорции потребления 2:1 ей нужно будет обменять на мировом рынке Δ единиц Икса на 2Δ единиц Игрека, где Δ удовлетворяет уравнению $(Y(X)+2\Delta)/(X-\Delta) = 2$, откуда $\Delta = (2X - Y(X))/4$. При этом итоговое потребление комплектов будет равно

$$X - \Delta = X/2 + Y(X)/4 = \begin{cases} 30 + 3X/8, & X < 60; \\ 30 + X/2 - X^2/480, & 60 \leqslant X \leqslant 120. \end{cases}$$

Нам нужно максимизировать эту функцию по X. Заметим, что она возрастает при $X < 60$, поэтому оптимум достигается при $X \geqslant 60$. При $X \geqslant 60$ графиком этой функции является парабола с ветвями вниз, и ее максимум достигается при $X = 120$. Отсюда получаем все остальные ответы.

На содержательном уровне в экономике произошло следующее. Дешевый, относительно альтернативных издержек производства, импортный Игрек вытеснил отечественный, что привело к закрытию заводов по производству Игрека и перетоку рабочей силы из производства Игрека в производство Икса на экспорт. Однако, поскольку производство Икса менее трудоемко, чем производство Игрека, далеко не все смогли найти новую работу в секторе производства Икса. В итоге возникла безработица, несмотря на то, что суммарное потребление комплектов возросло.

в) Независимо от величины , страна будет производить только 120 единиц Икса, потреблять 60 комплектов и иметь 120 безработных единиц труда. Потери от безработицы (в комплектах) перевесят рост потребления при 120 ⩾ 60 − 48, то есть $C \geqslant 1/10$. Таким образом, $_{min}$ = 1/10.

г) Решение 1. Заметим, что, независимо от величины тарифа, фактическая пропорция обмена для страны в целом (с учетом внешнеторговых операций государства) будет, как и раньше, 2:1. Поэтому объем производства Икса однозначно определяет количество потребленных в итоге комплектов, а значит, и уровень благосостояния. Значит, можно оптимизировать благосостояние непосредственно по объему производства Икса, найти этот оптимальный объем, а затем найти величину тарифа, при которой в равновесии ровно этот объем и будет произведен.

При $X < 60$ в стране не будет безработицы и поэтому увеличение производства Икса (движение в сторону решения, максимизирующего число комплектов) будет увеличивать благосостояние. Поэтому оптимальное значение X не меньше 60.

Из решения пункта б) мы знаем, что количество потребленных комплектов при производстве $X > 60$ единиц Икса равно $30 + X/2 - X^2/480$. При этом количество безработных единиц труда составит $240 - X - 2 \cdot (120 - X^2/120) = X^2/60 - X$. Таким образом, общественное благосостояние с учетом потерь от безработицы составит

$$W(X) = 30 + X/2 - X^2/420 - \frac{1}{10}\left(X^2/60 - X\right) = 30 + 0{,}6X - \left(\frac{1}{480} + \frac{1}{600}\right)X^2.$$

Графиком функции $W(X)$ является парабола с ветвями вниз, и ее максимум достигается в вершине

$$X^\star = \frac{0{,}3}{\frac{1}{480}+\frac{1}{600}} = \frac{120\cdot 0{,}3}{1/4+1/5} = \frac{36}{9/20} = 80 \geqslant 60.$$

Таким образом, оптимальный тариф должен быть таким, чтобы производители произвели 80 единиц Икса. Величину этого тарифа можно найти двумя способами.

Способ 1. Альтернативные издержки при $X = 80$ равны $X/60 = 80/60 = 4/3$. Равновесие же устанавливается таким образом, чтобы альтернативные издержки равнялись пропорции обмена, которую «чувствуют» экономические агенты (с учетом тарифа). Значит, должно быть выполнено $2(1-t) = 4/3$, откуда $t = 1/3$.

Способ 2. Найдем, сколько единиц будет производиться в стране при пропорции обмена $1 : (2(1-t))$, решив задачу, аналогичную пункту б). Страна будет экспортировать Δ единиц Икса, где Δ удовлетворяет уравнению $(Y(X) + 2(1-t)\Delta)/(X-\Delta) = 2$, откуда $\Delta = (2X - Y(X))/(2 + 2(1-t))$. Итоговое потребление комплектов равно

$$X - \Delta = \begin{cases} \frac{120}{2+2(1-t)} + \frac{2(1-t)-1/2}{2+2(1-t)}X, & X < 60; \\ \frac{120-X^2/120}{2+2(1-t)} + \frac{2(1-t)}{2+2(1-t)}X, & 60 \leqslant X \leqslant 120. \end{cases}$$

Необходимо установить значение t такое, что эта функция максимальна при $X = 80$.

Значит, $X = 80$ должно находиться в вершине параболы, соответствующей случаю $X \geqslant 60$. Абсцисса этой вершины равна $120(1-t)$, и значит, $120(1-t) = 80$, откуда $t = 1/3$. При этом можно проверить, что при $t = 1/3$ количество комплектов возрастает по X при $X < 60$, так что $X = 80$ действительно является максимумом с учетом обоих участков.

Решение 2. Как уже было отмечено ранее, независимо от величины тарифа, фактическая пропорция обмена для страны в целом (с учетом внешнеторговых операций государства) будет, как и раньше, 2:1. Заметим, что на мировом рынке Икс стоит $2p$ ден. ед., а Игрек — p ден. ед. (что как раз соответствует пропорции обмена $1 : 2$). Таким образом, если страна произведет $x^\star$ единиц товара Икс и $y^\star$ единиц товара Игрек, то *вне зависимости от ставки налога* суммарное число потребленных комплектов составит $K = (2x^\star + y^\star)/4$. Государство и население преследуют одни интересы: максимизация числа потребляемых комплектов! Поскольку весь собранный налог на импорт возвращается потребителям, то фактически все средства, которые можно было бы выручить на мировом рынке при производстве $x^\star$ единиц товара Икс и $y^\star$ единиц товара Игрек, в совокупности будут потрачены на приобретение максимально возможного числа комплектов.

При $X < 60$ в стране не будет безработицы и поэтому увеличение производства Икса (движение в сторону решения, максимизирующего число комплектов) будет увеличивать благосостояние. Следовательно, оптимальное значение X не меньше 60. В таком случае количество безработных будет равно $240 - x^\star - 2y^\star$, а общественное благосостояние

$$W(X) = K - 0{,}1U = \frac{2x^\star + y^\star}{4} - 0{,}1(240 - x^\star - 2y^\star) = 0{,}6x^\star - 0{,}45y^\star - 24$$

Тогда, решая задачу аналогично пункту **б)**, найдем, сколько единиц будет производиться в стране при пропорции обмена $1 : (2(1-t))$:

$x^\star = 120(1-t)$ единиц товара Икс и $y^\star = 240t - 120t^2$ единиц товара Игрек.

С учетом налога общественное благосостояние будет равно

$$W(X) = 0{,}6 \times 120(1-t) + 0{,}45 \times (240t - 120t^2) - 24$$

и достигает максимального значения при $t = 1/3$.

Содержательно введение тарифа скажется на экономике следующим образом. Поскольку импортный Игрек станет менее доступен, производство отечественного (трудоемкого) Игрека увеличится, в результате чего безработица сократится. При этом частично международная торговля сохранится, что позволит стране продолжать получать часть выгод от специализации.

Примечания:

- Если бы изъятый Игрек уничтожался, введение тарифа все равно могло бы повысить общественное благосостояние. В качестве упражнения найдите величину тарифа, которая максимизирует благосостояние в этом случае. (Конечно, сама максимальная величина благосостояния должна получиться меньше, чем в пункте г).)
- Предпосылка о том, что «экономика работает так, чтобы максимизировать количество комплектов» будет выполняться, например, при следующих условиях: (1) На мировом рынке Икс стоит $2p$ ден. ед., а Игрек — p ден. ед. (что как раз соответствует пропорции обмена $1 : 2$); (2) Все рынки совершенно-конкурентные и нет транспортных расходов, так что цены внутри страны равны мировым ценам; (3) Объемы производства выбираются так, чтобы суммарная выручка производителей была максимальна при данных ценах; (4) Вся выручка производителей обращается в доходы потребителей; (5) Потребители полностью тратят доход на покупку комплектов. В этой интерпретации прямые l_1, l_2 и l_3, изображенные на рисунке, будут одновременно являться линиями одинаковой выручки и бюджетными ограничениями потребителя.
- Для полноты картины можно рассчитать величину общественного благосостояния. При полном запрете торговли благосостояние равно 48. При полной либерализации торговли оно также равно 48 При введении оптимального тарифа оно составит $W(80) = 54$.

Схема оценивания

а) Максимум 8 баллов. Из них:

- 3 балла: верное обоснование расположения каждой из трех ключевых точек на КПВ оценивается в 1 балл.
- 2 балла: верное обоснование и изображение каждого из двух ключевых участков КПВ оценивается в 1 балл.
- 2 балла за верный поиск комплекта, который будет потребляться в стране.
- 1 балл за верный поиск уровня безработицы.

б) Максимум 8 баллов. Из них:

- 1 балл за верный пример любого доступного в условиях открытой торговли набора товаров, который лучше для страны, чем потребляемый в пункте а) набор.
- 1 балл за верное обоснование того, что оптимальный в условиях международной торговли набор находится не на линейном участке КПВ.
- 3 балла за верный поиск оптимального объема производства в условиях открытой экономики.
- 1 балл за верный поиск комплекта, который будет потребляться в условиях открытой экономики.
- 2 балла за верный поиск уровня безработицы.

в) Максимум 2 балла. Из них:

- 1 балл за составление верного неравенства, описывающего сравнение благосостояния страны в отрытой и закрытой экономиках.
- 1 балл за верно найденное значение $c_{\min}$.

г) Максимум 12 баллов. Из них:

- 2 балла за верный поиск объема производства товара Икс при любой произвольной ставке налога.
- 2 балла за верный поиск объема производства товара Игрек при любой произвольной ставке налога.
- 3 балла за верный поиск потребляемого в условиях свободной торговли набора и числа безработных для любой произвольной ставки налога при условии отсутствия трансферта.
- 3 балла за верный поиск государственного трансферта и потребляемого в условиях свободной торговли набора для любой произвольной ставки налога при условии возврата налога потребителям в виде трансферта.
- 2 балл за верное выражение для функции благосостояния и поиск налога, максимизирующего благосостояние.
- Если в решении этого пункта отсутствовал верный поиск максимального количества потребляемых комплектов, но имели место рассуждения о том, при каких значениях ставки налога страна будет осуществлять импорт товара Игрек, увеличивая свое благосостояние, то участнику выставлялся 1 балл.

Задача 5. Оптимальная цена при неизвестном спросе

Некоторая фирма-монополист хотела бы установить цену, максимизирующую выручку, однако функция спроса $D(p)$ известна фирме лишь примерно (что соответствует реальности для большинства фирм). А именно, фирма знает, что для каждой цены $p \in [0; 26]$ выполнено

$$24 - p \leqslant D(p) \leqslant 26 - p,$$

а также что при $p > 26$ спрос равен нулю. Другой информации о функции спроса нет. В частности, она необязательно линейна.

Какие значения может принимать цена, при которой выручка фирмы максимальна?

Решение

Если бы функция спроса проходила по нижней границе $24-p$, оптимальная цена равнялась бы 12, а если по верхней границе $26-p$, то 13. Поэтому естественно предположить, что оптимальная цена может принимать лишь значения от 12 до 13. В действительности, это не так.

Обозначим истинную функцию выручки за $TR(p) = p \cdot D(p)$. Нам известно, что $p(24-p) \leqslant TR(p) \leqslant$ $\leqslant p(26-p)$. До нижеприведенного решения можно додуматься, если построить графики функций $p(24-p)$ и $p(26-p)$ (см. рис. 5.1) и попытаться вписывать разные графики $TR(p)$ между этими двумя параболами.

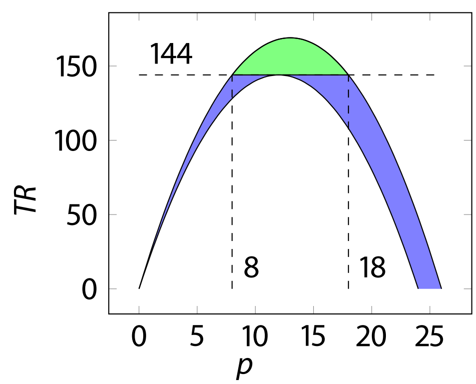


Рисунок 5.1. Допустимые значения максимума

Докажем, что оптимальная цена $p^\star$ не может быть меньше 8. Действительно, назначая цену $p < 8$, фирма в лучшем случае получит выручку $p(26 - p) < 8 \cdot (26 - 8) = 144$. Если же фирма назначит цену 12, она получит не меньше, чем $12 \cdot (24 - 12) = 144$. Значит, любая цена, меньшая 8, не может быть оптимальна.

Аналогично, если фирма назначит цену $p > 18$, она в лучшем случае получит выручку $p(26 - p) < 18 \cdot (26 - 18) = 144$. Если же фирма назначит цену 12, она получит не меньше, чем $12 \cdot (24 - 12) = 144$. Значит, любая цена, большая 18, не может быть оптимальна.

Наконец, покажем, что любая цена из отрезка $[8; 18]$ может быть оптимальной для какой-то функции спроса $D(p)$, удовлетворяющей условию. Вообще говоря, для каждой цены $\tilde{p} \in [8; 18]$ можно привести «свой» пример функции спроса $\tilde{D}(p)$, такой, что $\tilde{p}$ является оптимальной ценой при спросе $\tilde{D}(p)$. Однако в данной задаче существует единый пример, который покрывает сразу все цены из отрезка $[8; 18]$. Рассмотрим функцию спроса

$$\hat{D}(p) = \begin{cases} 26 - p, & \text{если } p < 8; \\ 144/p, & \text{если } 8 \leqslant p < 18; \\ 26 - p, & \text{если } 18 \leqslant p < 26; \\ 0, & \text{если } p \geqslant 268. \end{cases}$$

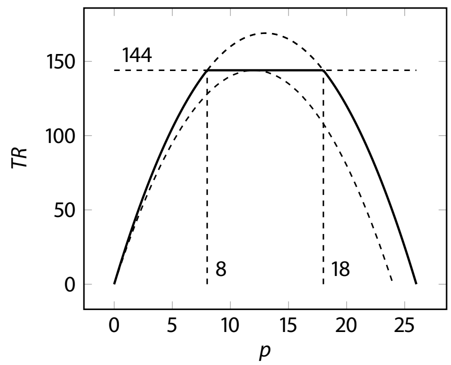


Рисунок 5.2. Пример функции выручки с максимумами во всех точках отрезка $[8, 18]$

Легко проверить, что $24 - p \leqslant \hat{D}(p) \leqslant 26 - p$ и при этом для данной функции спроса оптимальными являются все цены от 8 до 18 (см. рис. 5.2).

Ответ: $8 \leqslant p^{\star} \leqslant 18$.

Схема оценивания

Вся задача была разбита на две части: доказательство того, что точка $p^{\star}$ не может лежать вне отрезка $[8, 18]$ («необходимость») и доказательство того, что любая точка из этого отрезка может быть реализована как точка максимума выручки для некоторой функции спроса. За каждую из частей можно было набрать по **15 баллов**. Также можно было получить промежуточные баллы за частичные продвижения в правильном направлении.

- **К0** Ответ $[12, 13]$ (предположили, что спрос линеен, или продифференцировали неравенство или ещё что-то подобное): **0 баллов**.
- **К1** Доказательство того, что обязательно $p^{\star} \in [8, 18]$: **15 баллов всего**.
  - **К1.1** Соображение о том, что при любой функции $D(p)$, удовлетворяющей условию, максимум $pD(p) \geqslant 144$: **5 баллов**. Эти баллы ставились в том случае, когда в целом решение двигалось в правильном направлении: в частности, этот критерий не применялся в тех решениях, которые приходили к ответу $[12, 13]$, поскольку они были фундаментально неверными.
  - **К1.2** Проанализирован случай, когда взято максимально возможное D, составлено и решено уравнение $p(26-p) = 144$, но не поясняется, почему нужно было брать именно такое D: **5 баллов**

- **К2** Построен универсальный пример или семейство примеров, обслуживающее весь отрезок $[8, 18]$: **15 баллов всего**.
  - **К2.1** Пример, обслуживающий более одной, но не все возможные точки: **5 баллов**
  - **К2.2** Построен пример функции $D(p)$, но не доказано, что максимум функции спроса принимается именно там, где надо: **10 баллов**
- Штрафы
  - **Ш1** Построена функция $TR(p)$, но ничего не сказано о том, как из неё получить функцию спроса $D(p)$: **-3 балла**.
  - **Ш2** Несущественные арифметические ошибки: **-2 балла**.

Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 15—21 апреля 2017 года

Второй тур. Задачи

Дата написания	**17 апреля 2017 г.**
Количество заданий	**5**
Сумма баллов	**150**
Время написания	**240 минут**

Решения

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики или подготовке к олимпиадам. От участников не требуется слишком подробного решения; в любом случае самое важное при оценке — понимает ли участник, как решается задача.

Для любого $x \in [0,1)$ верно, что

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

Задача 6. Счастливые рисоеды

В стране Альфа производится единственный товар — рис. Собранный в конце каждого года урожай риса жители страны могут либо съесть, либо засеять на поля, чтобы в следующем году получить новый урожай. Таким образом, $Y_t = C_t + I_t$, где Y_t — собранный в году t урожай, C_t — потребление в году t, I_t — объем посева в году t (все переменные измеряются в тоннах). Засеяв I_t тонн риса в году t, в следующем году можно собрать урожай $Y_{t+1} = 80\sqrt{I_t}$.

По итогам каждого года каждая семья в стране Альфа либо счастлива, либо несчастлива. Все счастливые семьи похожи друг на друга (после сбора урожая они получают как минимум по тонне риса), каждая несчастливая семья несчастлива по-своему (такие семьи получают меньше тонны риса или не получают рис вовсе, поэтому в течение года выживают кто как может). Общее число семей в стране настолько велико, что, к сожалению, все счастливы быть не могут.

В начале 2017 года к власти в стране Альфа пришел новый президент. Срок его полномочий — 2 года, и он хочет, чтобы число семей, которые счастливы в течение всего срока его правления, было как можно бо́льшим (что будет потом, его не интересует). Президент сам решает, как именно следует распределять весь выращенный рис. Президент знает, что в прошлом году было засеяно 3600 тонн риса.

а) (15 баллов) Какое количество риса следует засеять в 2017 и 2018 годах для достижения цели президента? Сколько семей при этом будет счастливо в каждый из двух указанных годов? Сколько семей в этом случае будет счастливо в 2019 году?

б) (15 баллов) Представим теперь, что президент задумался о вечном. Какое максимальное количество семей может быть счастливо в экономике страны Альфа на протяжении бесконечно долгого периода времени (то есть начиная с 2017 года и навсегда)? Сколько риса для достижения этой цели следует сеять каждый год?

Решение

а) Количество счастливых семей равно потреблению риса.

$$C_{2017} = 80 \cdot \sqrt{3600} - I_{2017}$$

$$C_{2018} = 80 \cdot \sqrt{I_{2017}}$$

(в последнем периоде нет смысла инвестировать, так как президента не волнует, что будет в 2019 году). Чтобы достичь своей цели, президенту следует максимизировать минимум из C_{2017}, C_{2018}. Для этого, нужно, чтобы указанные переменных были равны. Отсюда получаем уравнение:

$$80 \cdot 60 - I_{2017} = 80 \cdot \sqrt{I_{2017}}$$

Отсюда находим $I_{2017} = 1600$, $C_{2017} = C_{2018} = 3200$.

Ответ: в 2017 году следует посадить 1600 тонн риса, а в 2018 году — ноль тонн. 3200 семей будут счастливы на протяжении этих двух лет, однако в 2019 году число счастливых семей окажется равным нулю.

б) Чтобы потребление семей вечно поддерживалось на постоянном уровне, необходимо, чтобы каждый год поддерживался один и тот же уровень инвестиций $I^\star$ и один и тот же уровень потребления $C^\star$.

В этом случае ежегодный уровень потребления составит:

$$C^\star = 80 \cdot \sqrt{I^\star} - I^\star$$

Относительно $\sqrt{I^\star}$ — это парабола с ветвями направленными вниз, следовательно, мы можем найти точку максимума: $I^\star = 1600$, $C^\star = 1600$.

Докажем, что число вечно счастливых семей не может быть больше 1600. Предположим противное: пусть в каждый момент времени есть не менее 1601 счастливой семьи. Тогда:

$$1601 \leqslant C_t = 80 * \sqrt{I_{t-1}} - I_t = 80 * \sqrt{I_{t-1}} - I_{t-1} - (I_t - I_{t-1}) \leqslant 1600 - (I_t - I_{t-1})$$

$$(I_t - I_{t-1}) \leqslant -1$$

Докажем, что число вечно счастливых семей не может быть больше 1600. Предположим противное: пусть в каждый момент времени есть не менее 1601 счастливой семьи. Тогда:

$$1601 \leqslant C_t = 80 * \sqrt{I_{t-1}} - I_t = 80 * \sqrt{I_{t-1}} - I_{t-1} - (I_t - I_{t-1}) \leqslant 1600 - (I_t - I_{t-1})$$

$$(I_t - I_{t-1}) \leqslant -1$$

Получаем, что в этом случае инвестиции уменьшаются на единицу каждый год. Следовательно, в конце концов они упадут до нуля, что уж точно не позволит поддерживать требуемый уровень потребления. Таким образом, мы получили противоречие.

Ответ: Таким образом, следует каждый год засеивать по 1600 тонн риса и при этом каждый год 1600 семей в стране Альфа будут счастливы.

Схема оценивания

В пункте **а)** ставится 6 баллов за получение необходимого квадратного уравнения; 3 балла за нахождение инвестиций в 2017 году; 3 балла за рассуждение о том, что инвестиций в 2018 году делать не нужно и, следовательно, потребление в 2019 году будет равно нулю; 3 балла за нахождение количества счастливых семей на протяжении правления президента.

В пункте **б)** 9 баллов выставляется на нахождение функции, задающей связь между $C^\star$ и $I^\star$; 3 балла за нахождение оптимальных инвестиций; 3 балла за нахождение числа семей, которые будут счастливы вечно. Также полный балл ставится в случае, если верный ответ угадан и приведено обоснование того, что более высокий уровень потребления не может быть обеспечен вечно.

Задача 7. В чём согласны экономисты — 2

Продолжим обсуждать исследование Дэна Фуллера и Дорис Гейде-Стевенсон[1], которое упоминалось в задаче 2 первого тура олимпиады.

Ниже приводятся два утверждения, которые находятся соответственно на третьем и четвертом местах по количеству экономистов, которые оказались в той или иной степени согласны с ними. (В скобках указана доля опрошенных, выразивших полное согласие и согласие с оговорками соответственно.) Прокомментируйте каждое из этих утверждений: объясните, почему многим экономистам оно кажется справедливым, а также почему, тем не менее, не все согласны с ним безоговорочно. Будьте лаконичны: ответ относительно каждого утверждения может уместиться в 3—5 предложений.

а) (15 баллов) *Регулировать загрязнение окружающей среды с помощью налогов и торгуемых разрешений на выбросы более эффективно, чем устанавливать жесткие ограничения выбросов* (58,5 % + 29,1 %).

б) (15 баллов) *Государство должно жестко следить за соблюдением антимонопольных законов* (55,8 % + 31 %).

Решение

а) Загрязнение окружающей среды является широко известной причиной возникновения негативных экстерналий: агенты, которые производят вредные выбросы, не учитывают издержки, которые они накладывают на остальных членов общества, из-за чего выбросов оказывается выше, чем было бы оптимально для общества. В утверждении перечислены классические методы борьбы с этим эффектом.

Возможные аргументы в пользу утверждения:

- **Стимулы действуют постоянно.** Стимулы сокращать выбросы при использовании инструментов налогов и торгуемых разрешений остаются независимо от уже достигнутого уровня выбросов, в отличие от применения инструмента жестких квот, когда достаточно сократить выбросы до заданного потолка, а дальше сокращать нет смысла.
- **Сокращения распределяются эффективно.** Первые два инструмента позволяют сокращать выбросы там, где это делать дешевле всего. Те компании, которым сокращать выбросы дороже, получают возможность выбросы не сокращать (вместо этого платить больше налогов или покупать больше разрешений). А те, которым дешево, сокращают выбросы сильно. Таким образом, суммарные издержки сокращений снижаются. Говоря чуть более сложно, это становится возможным потому, что данные инструменты приводят к выравниванию предельных издержек сокращения выбросов между экономическими агентами — а это есть условие минимизации суммарных издержек сокращения выбросов.

[1] Fuller, Dan, and Doris Geide-Stevenson. "Consensus Among Economists—An Update." *The Journal of Economic Education* 45.2 (2014): 131-146.

В то же время, жесткие ограничения заставляют фирмы сокращать выбросы до определенного уровня вне зависимости от предельных издержек сокращения.

Возможные оговорки:

- Распределяя квоты, государство как центральный планировщик имеет возможность рационировать их территориальное размещение, препятствуя запредельно высокой концентрации этих выбросов в одной точке.
- При некоторых характеристиках производства (уровень опасности отходов) или характеристиках территории (уникальные природные зоны, наличие редких видов и т.д.) общество может считать ожидаемый ущерб от загрязнения настолько высоким, что предпочитает не допускать даже его возможности – другими словами, квотирует на уровне нуля.

б) Аргумент в пользу утверждения:

- Антимонопольная политика существует потому, что монополия (как и прочие неконкурентные рыночные структуры, в которых возникает большая концентрация фирм неэффективна: в результате максимизации прибыли фирмами, влияющими на цену, цена устанавливается выше предельных издержек, из-за чего некоторые взаимовыгодные сделки между потребителями и производителями не совершаются, создавая общественные потери (DWL). Государство, защищая конкуренцию в ходе реализации антимонопольной политики (препятствуя сговору, контролируя ценообразование, запрещая злоупотребление доминирующим положением), может снизить потери эффективности, поэтому соблюдение антимонопольных законов полезно.

Возможные оговорки:

- Если монополию можно назвать «провалом рынка», то попытки скорректировать его могут приводить к «провалам государства». Проведение антимонопольной политики требует от государства экономической экспертизы и юридической квалификации конкретных случаев, в которых подозревается злоупотребление доминирующим положением на рынке (определение границ рынка, доли фирмы на нем и т. д.). Эти экспертиза и квалификация, во-первых, дорого стоят налогоплательщикам, а во-вторых могут быть проведены некачественно, в результате чего могут пострадать фирмы, деятельность которых не вызывает существенных потерь благосостояния. Возможно, было бы эффективно, если бы государство подходило к исполнению антимонопольного регулирования индивидуально, а не просто жестко следуя общим принципам регулирования.
- Часто монополии (или просто предприятия с большой доли рынка) — это успешные фирмы, которые добились своего положения благодаря упорному труду и инновациям. Интенсивная борьба с монополиями уничтожает стимулы становиться такими успешными фирмами.
- Часто фирмы занимают на рынке доминирующее положение потому, что являются более эффективными (в силу каких-то причин), чем реальные и потенциальные конкуренты. Жесткая борьба с монополиями может привести к поощрению неэффективных фирм, в результате чего распределение ресурсов в экономике может еще ухудшиться.

Схема оценивания

В каждом пункте для полного балла требуется хотя бы один обоснованный аргумент в пользу истинности утверждения и хотя бы один обоснованный аргумент, почему с утверждением можно согласиться лишь с оговорками.

Если есть аргумент (или аргументы) только в одну сторону, то пункт оценивается в 8 баллов.

Задача 8. Как построить стадион

По случаю Чемпионата мира 2018 года футбольный клуб «Забивака» решил построить новый стадион вместо того, на котором он играет сейчас. Спрос на посещение матчей предъявляют две группы болельщиков — фанаты клуба и просто ценители красивой игры. Фанаты предъявляют спрос при любой игре команды; их функция спроса имеет вид $q_1(p) = 60 - p$, где p — цена абонемента на посещение матчей в течение сезона, q_1 — количество купленных абонементов. Ценители красивой игры предъявляют спрос на абонементы, только если клуб играл красиво в предыдущем сезоне. Красота игры определяется случайными факторами; вероятность красивой игры равна 1/2. Функция спроса второй группы имеет вид $q_2(p) = 100 - p$.

Издержки на строительство стадиона вместимости x равны $C = 5000 + 100x$. Клуб принимает решение о вместимости стадиона и тратит деньги на его строительство в начале периода $t = 0$ (в будущем достраивать стадион нельзя), а получает выручку от продажи билетов в начале каждого периода $t = 1, 2, \ldots$ (до бесконечности). Клуб максимизирует ожидаемую приведенную стоимость денежного потока, то есть величину

$$-C + \frac{0{,}5TR_1 + 0{,}5TR_{1+2}}{1 + r} + \frac{0{,}5TR_1 + 0{,}5TR_{1+2}}{(1 + r)^2} + \frac{0{,}5TR_1 + 0{,}5TR_{1+2}}{(1 + r)^3} + \ldots,$$

где TR_1 — выручка от продажи абонементов только фанатам, TR_{1+2} — выручка от продажи билетов как фанатам, так и ценителям красивой игры. Множители 0,5 присутствуют в силу того, что каждый из двух случаев реализуется с вероятностью 1/2. Ставка процента r равна 10 %. Клуб принимает решение о ценах в начале каждого периода, когда уже известно, будут предъявлять спрос ценители красивой игры или нет.

а) (15 баллов) Предположим, что фанаты любят смотреть матч только из-за ворот, а ценители красивой игры — только с центральной трибуны. Клуб может построить каждую трибуну любой вместимости, а потом назначать разные цены на билеты на разные трибуны. Определите оптимальные цены на билеты абонементов на разные трибуны (на центральную трибуну — только для случая, когда на нее есть спрос) и оптимальную вместимость каждой трибуны.

б) (15 баллов) Предположим, что клуб решает ту же задачу при условии, что любому зрителю безразлично, откуда смотреть матч, и поэтому проводить ценовую дискриминацию между фанатами и остальными болельщиками не получится. Клуб назначает единую цену для всех мест на стадионе. Найдите оптимальную цену абонемента (в зависимости от того, предъявляет спрос вторая группа или нет), и оптимальную вместимость стадиона.

Решение

а) Обозначим за x_1 вместимость трибуны за воротами, x_2 — центральной трибуны, $x_1 + x_2 = x$. Когда стадион уже построен, фирма при установлении цен будет воспринимать x_1 и x_2 как данные. При установке цен фирма просто будет максимизировать TR_1 или TR_{1+2} в зависимости от того, какой из случаев реализовался, при ограничении, что количество проданных абонементов не может быть больше, чем вместимость соответствующей трибуны.

Независимо от того, предъявляет ли спрос вторая группа, для фанатов фирма будет решать задачу $q_1(60 - q_1) \to \max$ при условии $0 \leqslant q_1 \leqslant x_1$. Ее решением является $q_1^\star = x_1$ при $x_1 \leqslant 30$ и $q_1^\star = 30$ в противном случае.

Для ценителей красивой игры (если они присутствуют) задача аналогична: $q_2(100-q_2) \to \max$ при условии $0 \leqslant q_2 \leqslant x_2$. Ее решением является $q_2^\star = x_2$ при $x_2 \leqslant 50$ и $q_1^\star = 50$ в противном случае.

В периоде 0 фирма будет выбирать x_1 и x_2, осознавая, что в будущем она будет выбирать объемы, найденные выше. Заметим, что выбирать $x_1 > 30$ или $x_2 > 50$ не может быть выгодно, так как дополнительных денег от продажи билетов это не принесет, а предельные издержки постройки дополнительных мест положительны. Поэтому при поиске оптимальных x_i мы можем ограничиться рассмотрением $x_1 \leqslant 30$ и $x_2 \leqslant 50$. Тогда ожидаемая приведенная стоимость будет равна

$$-5000 - 100(x_1 + x_2) + (0{,}5TR_1 + 0{,}5(TR_1 + TR_2))\frac{1/(1+r)}{1 - \frac{1}{1+r}} =$$
$$= -5000 - 100(x_1 + x_2) + \frac{1}{r}(x_1(60 - x_1) + 0{,}5x_2(100 - x_2) =$$
$$= 10x_1(60 - x_1) - 100x_1 + 5x_2(100 - x_2) - 100x_2 - 5000.$$

(Мы смогли воспользоваться формулой, данной на титульном листе, так как числители всех дробей оказались одинаковы.)

Заметим, что целевая функция является суммой двух слагаемых, каждое из которых зависит только от одной переменной, и поэтому мы можем максимизировать их по отдельности. Каждое из них является функцией, графиком которой является парабола с ветвями вниз, отсюда находим $x_1^\star = 25$, $x_2^\star = 40$.

Значит, $p_1 = 60 - 25 = 35$, $p_2 = 100 - 40 = 60$, а полная оптимальная вместимость стадиона равна 65.

б) Теперь фирма в каждом из случаев выбирает цену p и объем продаж q, воспринимая общую вместимость x как заданную. Вместимость x является переменной, которая потенциально влияет на выручку как в случае низкого, так и в случае высокого спроса, и связывает эти две ситуации.

Если спрос предъявляют только фанаты, задача максимизации выручки останется прежней, ее решением является $q = x$ при $x \leqslant 30$ и $q = 30$ в противном случае.

Если спрос предъявляют обе группы, фирма будет максимизировать выручку на суммарной функции спроса, имеющей вид

$$D(p) = \begin{cases} 100 - p, & 60 < p \leqslant 100; \\ 160 - 2p, & 0 \leqslant p \leqslant 60. \end{cases}$$

Легко проверить, что оптимальным объемом (при ограничении на вместимость) будет являться $q^\star = x$ при $x < 80$ и 80 в противном случае.

Тогда при оптимальном выборе объемов

$$0{,}5TR_1 + 0{,}5TR_{1+2} = \begin{cases} 0{,}5x(60 - x) + 0{,}5x(100 - x), & x \leqslant 30; \\ 450 + 0{,}5x(100 - x), & 30 < x \leqslant 40; \\ 450 + 0{,}5x(80 - x/2), & 40 < x \leqslant 80; \\ 450 + 1600, x > 80. \end{cases}$$

Обозначим эту функцию за $f(x)$. Тогда ожидаемая приведенная стоимость равна $\frac{1}{r}f(x) - C = 10f(x) - 100x - 5000$. Выпишем эту функцию:

$$NpV(x) = -5000 + \begin{cases} 700x - 10x^2, & x \leqslant 30; \\ 450 + 400x - 5x^2, & 30 < x \leqslant 40; \\ 450 + 300x - 2{,}5x^2, & 40 < x \leqslant 80; \\ 20500 - 100x, x > 80. \end{cases}$$

На каждом из участков, кроме последнего, графиком этой функции является парабола с ветвями вниз. При этом вершина параболы, соответствующей первому участку — $x^\star = 35$ — лежит справа от этого участка, поэтому функция монотонно возрастает на нем. Вершина параболы, соответствующей второму участку — $x^\star = 40$ лежит на его конце, и поэтому функция монотонно возрастает на втором участке. Вершина параболы, соответствующей третьему участку — $x^\star = 60$, принадлежит этому участку, а на последнем участке функция монотонно убывает. Поэтому оптимальная вместимость — $x^\star = 60$.

Таким образом, если спрос предъявляют только фанаты, фирма продаст 30 абонементов по цене $60 - 30 = 30$, а если спрос предъявляют обе группы — 60 абонементов по цене $80 - 60/2 = 50$.

Схема оценивания

а) Максимум 15 баллов. Из них: 1 балл выставлялся участнику, если он верно пользовался формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии при учете коэффициента дисконтирования. 14 баллов выставлялось участнику при полностью обоснованном верном решении с учетом коэффициента дисконтирования. При неполном и/или неверном решении была введена система штрафов, которые суммировались, если решение участника оказывалось неполным и/или в нем были допущены ошибки:

- -1 балл: допущена арифметическая ошибка, которая не приводила к упрощению решения или существенному изменению в ответе.
- -1 балл: отсутствие обоснования экстремума (в частности, максимума) функций, относительно которых решалась оптимизационная задача.
- -2 балла: отсутствие обоснования возможности решения задачи максимизации ожидаемой приведенной стоимости денежного потока отдельно для каждой группы зрителей (при условии, что участник выбирал именно этот путь решения оптимизационной задачи).
- -7 баллов: неверный поиск решения поставленной задачи путем максимизации выручки от каждой группы зрителей, а не приведенной стоимости денежного потока клуба.
- -8 баллов: неверный поиск решения поставленной задачи при использовании предположения о том, что $TR_{(1+2)} = TR_1$ или $TR_{(1+2)} = TR_2$.

б) Максимум 15 баллов. Полное верное обоснованное решение оценивается в 15 баллов.

При неполном и/или неверном решении была введена система штрафов, которые суммировались, если решение участника оказывалось неполным и/или в нем были допущены ошибки:

- -1 балл: допущена арифметическая ошибка, которая не приводила к упрощению решения или существенному изменению в ответе.
- -2 балла: при верном ходе решения задачи участник не давал ответа на вопрос о ценах для двух различных ситуаций (в зависимости от того, предъявляет спрос вторая группа или нет), верно находя при этом вместимость стадиона.
- -2 балла: не учтена, или построена с ошибкой функция суммарного спроса зрителей первой и второй группы, и/или не учтено соотношение между количествами билетов в зависимости от того, предъявляет ли вторая группа спрос на посещение матчей.
- -6 баллов: при верном ходе решения не рассмотрен один из интервалов возможных цен (или вместимости стадиона). В частности, типичной ошибкой в решении было отсутствие у клуба возможности установления единой цены, при которой в случае предъявления спроса на матчи со стороны второй группы зрителей клубу выгоднее было бы продавать билеты только этой группе.
- -8 баллов: при верной постановке задачи максимизации приведенной стоимости денежного потока участник, решая эту задачу, объемы спроса фанатов в случае наличия или отсутствия спроса второй группы приводил как подобные слагаемые.
- -10 баллов: участник устанавливал единую цену для обеих групп в обеих ситуациях, т.е. цена не зависела от того, предъявляет ли вторая группа спрос на билеты. Участник ограничивался указанным размером штрафа только в том случае, если он верно находил и полностью обосновывал поиск цены (и соответствующей ошибочному решению вместимости стадиона) для фанатов в том случае, когда спрос не предъявляла вторая группа. Если верный обоснованный поиск этой цены при допущенной в решении указанной ошибке отсут-

ствовал, то решение задачи монополии с единой ценой для всех зрителей оценивалось лишь в 1 балл.

При неверном в целом ходе решения данного пункта задачи участнику выставлялись некоторые баллы за попытку его решения. Такие случаи и максимальные баллы, которые мог получить участник, приведены ниже. Обращаем внимание, что при учете совокупности всех таких случаев участник не мог получить более 5 баллов за решение пункта б). Указанная выше система штрафов за арифметическую ошибку и отсутствие ответов на поставленные вопросы пункта была применима и в этой части решения участника.

1) Решена задача монополии с единой ценой (1 балл).

2) Указано, что необходимо рассматривать различные значения вместимостей стадиона или различные интервалы цен билетов на матчи, причем верно определен интервал цен и/или некоторые интервалы вместимости стадиона (1 балл).

3) Верно построена функция суммарного спроса обеих групп (1 балл).

4) Отдельно рассмотрен случай, когда спрос не предъявляет вторая группа, и обосновано, что в этом случае для нахождения цены абонемента необходимо максимизировать выручку от первой группы зрителей (3 балла).

Задача 9. Краудфандинг

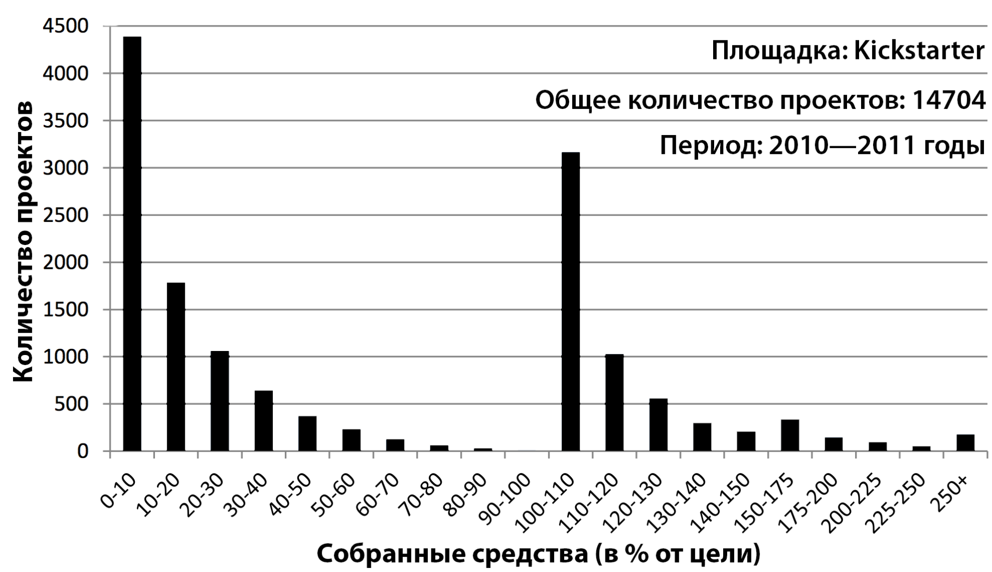
Краудфандинг (дословный перевод — «финансирование толпой») — способ финансирования проектов, который приобрел широкую популярность в последнее время. С помощью краудфандинга артисты записывают музыкальные альбомы, начинающие предприниматели привлекают инвестиции для своих стартапов, политики финансируют свои избирательные кампании.

Одной из самых известных площадок для организации краудфандинга является Kickstarter (http://www.kickstarter.com). Зайдя на сайт, потенциальные инвесторы могут изучить и профинансировать проекты, которые там разместили их авторы.

Сначала автор проекта объявляет сбор средств, принять участие в котором может каждый желающий. Сумма средств, собранная к текущему моменту, всегда видна на странице проекта. Если определенную заранее сумму удается собрать к некоторому заранее объявленному сроку, проект реализуется. Тогда те, кто вложил деньги, обычно получают небольшой бонус (например, возможность купить произведенный товар со скидкой или получить бесплатную открытку с подписью политика, чья избирательная кампания была профинансирована). Если необходимая сумма за отведенное время не собрана, все пожертвованные деньги возвращаются.

а) (6 баллов) Предположим, что предприниматель задумал осуществить проект и ищет финансирование. Казалось бы, краудфандинг — самый простой способ получить деньги. Тем не менее, далеко не все прибегают к нему. Объясните, почему предприниматель может отказаться от краудфандинга в пользу других способов привлечения денег.

б) (12 баллов) На графике показано, сколько проектов получили различные объемы финансирования в процентах от заявленной цели[2]. Большинство проваленных проектов недобрали существенную часть необходимой суммы, а успешные проекты чаще всего лишь ненамного переходили этот порог. Объясните, почему график может иметь такой вид.



[2] *Источник:* Kuppuswamy, V., Bayus, B. L. (2015). Crowdfunding creative ideas: The dynamics of project backers in Kickstarter. UNC Kenan-Flagler Research Paper No. 2013-15.

в) (5 баллов) Есть данные, что при прочих равных условиях проект, в описании которого допущена орфографическая ошибка, имеет меньше шансов на сбор необходимой суммы. Как можно объяснить такую закономерность?

г) (7 баллов) Динамика поступления платежей обычно имеет форму буквы U: в первую и последнюю неделю средства жертвуются активнее. Как можно объяснить такую закономерность?

Решение

Источники данных для задачи: Mollick, E. (2014). The dynamics of crowdfunding: An exploratory study. Journal of business venturing, 29(1), 1-16. и Kuppuswamy, V., Bayus, B. L. (2015). Crowdfunding creative ideas: The dynamics of project backers in Kickstarter. UNC Kenan-Flagler Research Paper No. 2013-15

а) Можно выделить следующие причины, по которым авторы проектов могут отказываться от краудфандинга:

- **Краудфандинг занимает время**. В зависимости от необходимой суммы и привлекательности проекта сбор средств может затянуться на месяцы. Для некоторых проектов скорость реализации является определяющим фактором. В таких случаях предприниматель может предпочесть кредит в банке краудфандингу.
- **Неопределенность результата**. Нет гарантии, что краудфандинг закончится успехом. В случае, если собрать необходимые средства не получится, предприниматель потеряет время.
- **Публичное раскрытие информации**. Для проведения краудфандинга необходимо сделать презентацию проекта. В ряде случаев это может навредить бизнесу — конкуренты могут подсмотреть идею и реализовать ее раньше.
- **Не та целевая аудитория**. Аудитория посетителей Kickstarter может сильно отличаться от целевой аудитории создаваемого продукта.

б) Задача этого пункта — предложить такую непротиворечивую систему предпосылок, при которой распределение будет обладать всеми характерными особенностями. Выделим несколько таких особенностей приведенного графика:

- Пик на 0%
- Убывание в окрестности 0%
- Провал перед 100% от необходимой суммы, и скачок на 100%
- Маленькая доля проектов, набравших > 100%
- Ненулевая доля проектов, набравших более 100% от необходимой суммы

Объясним сначала поведение графика в области маленьких процентов. Предположим, что качество проектов распределено так, что доля проектов качества k убывает по k. Если жертвователи умеют различать качество проекта и более охотно финансируют более качественные проекты, то доля проектов, получивших финансирование в доле t, будет убывать по t. В предельном случае можно предположить, что проекты могут быть «хорошими» и «плохими», а большинство инвесторов умеет различать качество проекта. Тогда информированные инвесторы будут поддерживать только «хорошие» проекты (неинформированные будут одинаково относиться к проектам обоих типов), а распределение доли собранных средств будет похоже на изображенное на графиках в условии задачи.

Большое количество некачественных проектов может объясняться также тем, что издержки выставления проекта на Kickstarter низки и среди предлагаемых проектов много не продуманных в достаточной степени. Кроме того, процент от собранной суммы может влиять на решение инвесторов вложить собственные средства. Если очевидно, что проект не наберет требуемую сумму, то инвестор может не пожертвовать денег, даже если проект ему интересен.

При таких предположениях распределение доли профинансированных проектов в окрестности 0% будет иметь представленный на графике вид.

Отсутствие проектов, набравших почти 100%, может объясняться тем, что участники краудфандинга на платформе kickstarter.com могут вести себя стратегически. В случае, если автор проекта видит, что проекту не хватает совсем немного, чтобы преодолеть рубеж минимальной необходимой суммы, у него возникают стимулы самостоятельно пожертвовать некоторую сумму. Это позволит ему получить существенное финансирование (хоть и меньшее, чем ему было нужно) вместо нуля.

Когда проект набирает требуемую сумму, все понимают, что проект уже будет реализован. Тогда многие инвесторы больше не ощущают потребности финансировать проект. Этим объясняется то, что очень мало проектов, набравших больше 100-110% от требуемой суммы. Тем не менее, такие проекты есть. Это может объясняться тем, что для ряда жертвователей желание поддержать понравившийся проект сильнее денег и не зависит от достижения порога получения финансирования. Альтернативное объяснение — жертвователь охотится за бонусом, который будет гарантирован после достижения порога в 100% от необходимой суммы.

в) Наличие орфографической ошибки означает, что автор выделил недостаточно времени на подготовку заявки. Это может сигнализировать о низком качестве самого проекта, поскольку повышается вероятность того, что автор проработал его недостаточно глубоко.

г) Более активное финансирование проекта в первые дни после публикации заявки может быть связано с двумя соображениями. Во-первых, проект в самом начале финансируют знакомые предпринимателя. Во-вторых, после публикации проект может поддерживаться в топе выдачи проектов при использовании фильтра «самые новые». Чем дальше, тем влияние этих эффектов меньше. Возрастание пожертвований ближе к дедлайну может быть связано с тем, что в конце периода сбора средств выявляется больше информации о качестве проекта: жертвователи наблюдают за динамикой поступления платежей и делают вывод о качестве проекта.

Схема оценивания

а) • А-1. Первая причина — **3 балла**

• А-2. Вторая причина — **3 балла**

- А-3. Неэкономические причины (юридическое ограничение возможности создания проекта на платформе несовершеннолетними и т.п.) **не оценивались**
- А-4. Причина «Не удастся собрать деньги» не оценивалась, если она не сопровождалась комментарием о том, что это приведет к потери времени

б)
- Б-1. Пик на 0% — **2 балла**
- Б-2. Убывание после 0% — **2 балла**
- Б-3. Провал перед 100% от необходимой суммы, и скачок на 100% — **4 балла**
- Б-4. Маленькая доля проектов, набравших > 100% — **2 балла**
- Б-5. Ненулевая доля проектов, набравших более 100% от необходимой суммы **2 балла**

в)
- Фактически, было бинарное распределение баллов: 5 (верно) или 0 (неверно).

г)
- Г-1. Объяснение одного конца параболы — **4 балла**
- Г-2. Объяснение другого конца параболы — **3 балла**

Задача 10. Правила приема

Во многих странах абитуриенты распределяются по вузам и факультетам с помощью централизованных алгоритмов. Рассмотрим один из них.

Допустим, есть m абитуриентов и n факультетов. На факультете с номером i есть q_i мест, суммарное количество мест на всех факультетах не меньше m. Каждый абитуриент подает для обработки компьютерной программой информацию о том, какой факультет является для него первым по предпочтительности, вторым по предпочтительности, и т. д. до последнего. Затем программа на основе этой информации определяет, на какой факультет пойдет каждый абитуриент, с помощью следующей процедуры:

Шаг 1. Каждый абитуриент рассматривается как кандидат на наилучший для себя (согласно поданным предпочтениям) факультет. Если на факультете достаточно мест, чтобы принять всех таких кандидатов, то он принимает их всех. Если мест на факультете i недостаточно, то он принимает q_i абитуриентов из числа кандидатов согласно некоторым общеизвестным правилам, которые могут быть разными для разных факультетов. (Например, факультет может быть обязан принимать абитуриентов с наибольшим суммарным баллом ЕГЭ, при равенстве баллов обязан сравнивать абитуриентов по неким другим четко прописанным критериям и т. д.)

Последующие шаги. На каждом последующем шаге каждый абитуриент, отвергнутый на предыдущем шаге, рассматривается как кандидат на наиболее предпочтительный для себя факультет из числа факультетов, на которые он еще не был кандидатом и где еще остались места. Если на факультете достаточно оставшихся мест, чтобы принять всех таких кандидатов, то он принимает их всех. Если мест на факультете недостаточно, то он заполняет оставшиеся места согласно общеизвестным правилам.

Поскольку суммарное количество мест на всех факультетах не меньше, чем общее количество абитуриентов, на каком-то шаге все абитуриенты будут распределены по факультетам. Тогда работа программы заканчивается.

Анализируя работу этого алгоритма, экономисты заметили, что абитуриентам может быть выгодно искажать информацию о своих истинных предпочтениях. Рассмотрим эту проблему на следующем «игрушечном» примере.

> Предположим, есть три факультета, a, b и c, в каждом по одному месту, и три абитуриента — Петя, Юля и Надя. Предпочтения Пети и Юли относительно факультетов выглядят как $a \succ b \succ c$ (a лучше, чем b, а b лучше, чем c), предпочтения Нади как $b \succ c \succ a$. Каждый факультет обязан выбирать абитуриентов с наибольшим количеством баллов на заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников, причем общеизвестно, что балл Пети больше балла Юли, а тот, в свою очередь, больше, чем балл Нади.

а) (5 баллов) Найдите распределение абитуриентов по факультетам, которое реализуется в результате работы алгоритма, описанного выше, если абитуриенты честно сообщат свои предпочтения.

б) (5 баллов) Докажите, что одному из трех абитуриентов выгодно солгать, то есть сообщить алгоритму предпочтения, отличающиеся от его истинных (при условии, что другие два абитуриента будут сообщать свои истинные предпочтения).

в) (8 баллов) Считается, что возникновение у абитуриентов стимулов искажать информацию о предпочтениях — проблема. Какие издержки (потери экономической эффективности) могут быть вызваны возникновением таких стимулов?

г) (12 баллов) Вернемся к общему случаю с n факультетами и m абитуриентами. Будем говорить, что некий алгоритм распределения *устраняет обоснованную зависть*, если он всегда производит распределение абитуриентов по факультетам, обладающее следующим свойством: не существует такой пары абитуриентов, что (1) первый абитуриент предпочитает факультет, куда попал второй, своему факультету; (2) первый абитуриент лучше второго с точки зрения правил приема на факультет второго.

Допустим, по закону все факультеты упорядочивают абитуриентов одинаково. Придумайте алгоритм распределения абитуриентов по факультетам, который одновременно устраняет как обоснованную зависть, так и стимулы лгать о своих предпочтениях (никакой абитуриент не сможет, солгав, попасть на более предпочтительный для себя факультет, каковы бы ни были предпочтения, сообщенные алгоритму другими абитуриентами). Докажите, что для вашего алгоритма в общем случае выполняются указанные свойства и проиллюстрируйте его работу на примере с Петей, Юлей и Надей.

Решение

а) Петя попадет на факультет a, Юля на факультет c, а Надя на факультет b.

б) Очевидно, что этим абитуриентом будет Юля, так как только она не получает лучший для себя факультет в распределении выше. Если она заявит, что ее предпочтения имеют вид $b > a > c$ (что неправда), то она попадет на факультет b (поменявшись местами с Надей), что для нее с точки зрения ее истинных предпочтений лучше, чем факультет c.

в) Правда только одна, а лгать можно по-разному. Действительно, со стимулами лгать возникает также вопрос о том, как именно оптимально лгать. Ответ на него может зависеть от предпочтений других участников (и того, как они будут их искажать!). Это может заставить участников инвестировать время и деньги в поиск такой информации (что является чистой потерей с точки зрения общества), а также повышает степень неопределенности в системе. Кроме того, если каждый абитуриент говорит правду, координаторы системы автоматически получают информацию об истинной популярности разных факультетов, которую затем можно использовать, например, для оценки их деятельности. Если информация о предпочтениях искажена, сделать этого нельзя.

В качестве верных ответов засчитывались, например, следующие:

- Абитуриенты подают факультетам неверный сигнал о качестве последних. За счёт этого менее престижные факультеты получают большее финансирование.
- Можно предположить, что предпочтения абитуриентов устроены следующим образом: наибольшую ценность представляет первый указанный выбор. Остальные не значимы. В этом случае даже в исходном примере ложь Юли приводит к уменьшению общественного благосостояния.
- В реальности абитуриенты наблюдают лишь свои предпочтения. Для того, чтобы узнать предпочтения других участников, абитуриентам придётся потратить на это время и деньги.

г) Алгоритм этот прост. Занумеруем абитуриентов в едином порядке ранжирования их факультетами. После того, как участники подали свои предпочтения в систему: (1) отправим первого (лучшего) абитуриента на лучший с его точки зрения факультет; (2) будем отправлять каждого следующего по списку на лучший для него факультет среди тех, в которых еще остались места. Очевидно, что никому не будет выгодно лгать (сказав правду, каждый попадет в лучший из оставшихся факультет). При этом любая зависть может быть только необоснованной: на любой факультет, лучший, чем тот, что достался абитуриенту j, попадут только те, кто стоит выше в рейтинге, чем j.

При этом важно заметить, что существуют и другие алгоритмы, позволяющие одновременно устранить и обоснованную зависть, и стимулы лгать. Участник мог привести пример любого работающего алгоритма.

Примечание: В 2012 году Ллойд Шепли и Элвин Рот получили Нобелевскую премию по экономике, в том числе, за создание алгоритма распределения, который имеет указанные свойства, даже если правила приема на разные факультеты различны. Этот алгоритм, впервые описанный в 1962 г., получил известность как *алгоритм Гейла-Шепли*. Алгоритм, описанный в решении выше, является частным случаем алгоритма Гейла-Шепли. В условии же описывается работа так называемого *Бостонского алгоритма*, который является популярным способом распределять учеников по школам на практике во многих городах. В 2003 г. команда Элвина Рота приняла участие в реформе процедуры распределения учеников по школам в Бостоне, в результате чего действовавший там до этого (Бостонский) алгоритм был заменен на алгоритм Гейла-Шепли. В результате этого степень удовлетворенности работой системы в городе возросла, что связано, в том числе, с устранением проблем, описанных в пункте в). Подробнее об этом и других успешных примерах «дизайна рынков» можно почитать в книге Элвина Рота «Кому что достанется — и почему», вышедшей на русском языке[3].

Схема оценивания

а) Максимум 5 баллов. Полное решение с верным ответом.

б) Максимум 5 баллов. Полное решение с верным ответом.

[3] Рот, Элвин. Кому что достанется — и почему. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016.

в) Максимум 8 баллов. По 4 балла за один верный аргумент. В зачёт идут не более двух аргументов.

г) Максимум 12 баллов. Из них:

- 4 балла. Приведён любой верный алгоритм, который одновременно устраняет как обоснованную зависть, так и стимулы лгать.
- 3 балла. Доказано, что алгоритм позволяет избежать обоснованной зависти.
- 3 балла. Доказано, что алгоритм позволяет избежать стимулов лгать о своих предпочтениях.
- 2 балла. Работа алгоритма проиллюстрирована на примере с Петей, Юлей и Надей.