Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

10 класс Шифр 1-10-01

1	2	3	4	5	Σ
+ 7	+ 7	− 2	+ 6	6	~~28~~ 32

① 10 рыцарей быть не могло, т.к рыцарство влечет, что загаданное число >1, а с другой стороны загаданное число <1, поэтому рыцарей не больше 9.

Пример на 9 рыцарей.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
											— ~~но~~ номер
В1	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10	— Высказывание первое
В2	<2	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1	— Высказывание второе
П	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	— ~~Позиц~~ Р или Л
ЗЧ	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	5,5	— загаданное число

② Пусть стороны ромба — числа a, b, c, d, причем

(1) $a \geq b \geq c \geq d$, $a+b+c+d=10^{100}$.

$a+b+c \vdots d$

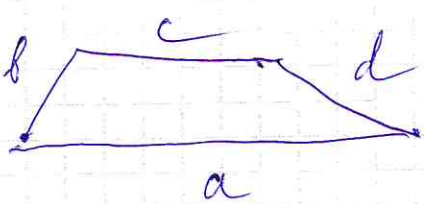
$b+c+d \vdots a$

$a+c+d \vdots b$

$a+b+d \vdots c$

Заметим, что ~~a+b~~

$b+c+d > a$ +, $b+c+d \leq 3a$. +



Пусть $\cancel{a}b+c+d=2a$. +

Тогда $a+b+c+d=3a=10^{100}$, противоречие, значит

$b+c+d=3a$, т.к $b+c+d=ka$, $1<k\leq 3$, откуда

и из (1) немедленно следует, что $a=b$, $a=c$, $a=d$, значит все стороны равны и это ромб.

(3). Докажем следующее утверждение по индукции:
Пусть есть разные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ и их перестановка $b_1, \ldots b_n$, такие, что $a_1 \neq b_1, a_1+b_1 \in Q \ldots a_n \neq b_n, a_n+b_n \in Q$. Тогда при ~~$n \neq 1$~~, $n=2k+1$, $k \in N$ количество иррациональных чисел не превосходит $2k-2$ в наборе $a_1 \ldots a_n$.

Лемма. 1 ?
Пусть $x \notin Q$, $y \in Q$, тогда $x+y \notin Q$

Лемма. 2 ?
Пусть $x \in Q$; $y \in Q$, тогда $x+y \in Q$

База: $k=1$
~~а~~ Есть лишь 1 способ, при котором числа в парах не равны:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \end{matrix}$$

Пусть ~~все рацион~~ все иррациональны.

Тогда $(a+b)+(b+c) \in Q$ [Заметим, что оба числа в паре одинаковой рациональности (3)]

$\Downarrow$

$2b+(a+c) \in Q$,

$2b \in Q \Rightarrow b \in Q$ – противоречие.

Если ~~b~~ a, не умаляя общности $\in Q$, то $b \in Q$, т.к $a+b \in Q$

и т.к $b+c=Q$, то $c \in Q$, иначе противоречие

с леммой 1.

Переход:

2k 2k

Пусть в наборе все числа иррациональны.
Тогда найдется такая цепочка из чисел нечетной длины, что 2 соседних стоят в паре.

$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{2t+1}$
$a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_1$

С одной стороны $(\overset{\notin Q}{a_1+a_2})+\ldots(\overset{\in Q}{a_{2t-1}+a_{2t}})+\overset{\notin Q}{a_{2t+1}} \notin Q$

по Лемме 1. Но $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots(a_{2t+1}+a_1) \overset{\in}{\cancel{\notin}} Q$.

~~так,~~ по Лемме 2. Противоречие. ~~Значит есть~~ и с чем!

? Почему

~~хотя бы 2 пары рациональных чисел, выкидывая~~

Если есть ровно 2 пары рациональных чисел, то ~~по инд~~ они обязательно стоят друг с другом паре (3),

Выкидывая их получаем по предположению инд.

верный переход, спускаясь к перестановке 2017 чисел.
Если же хотя бы 3 числа рациональны, утверждение индукции верно.

Так, чисел $\notin \mathbb{Q}$ ≥ 3.

Пример на 2016.

$1-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$		$1-\sqrt{p_{1008}}$	$\sqrt{p_{1008}}$	1	2	3
$\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	. . .	$\sqrt{p_{1008}}$	$1-\sqrt{p_{1008}}$	2	3	1

, где $p_1 = 2$, p_i — i-тое простое число

~~Очевидно, что все чи~~

Очевидно, что все числа вида $1-\sqrt{p}$ и $\sqrt{p}$ иррациональны и различны,

+

④ Заметим, что

$$P_n(x)\cdot x^2 + a_{n+1} = P_{n+1}(x)$$

~~P_n~~ $P_i(x)$ – четная функция, поэтому её наименьший корень отрицателен, поэтому $a_i < 0$ при $i \geq 2019$

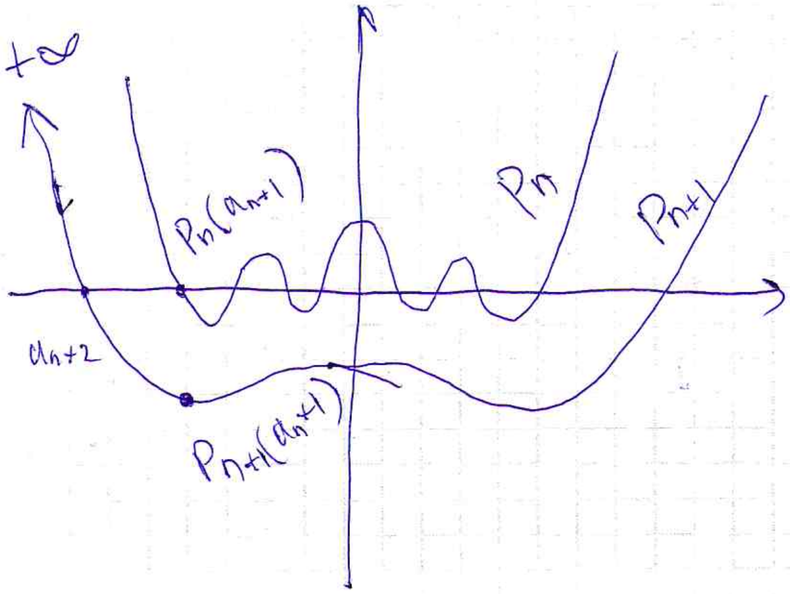
$$P_i(x) \to \infty \text{ при } x \to \infty \text{ и при } x \to -\infty \quad (1)$$

$\cancel{P_n(a_{n+1})\,x^2 + a_{n+1}} =$

$$\underbrace{P_n(a_{n+1})}_{=0}\cdot(a_{n+1})^2 + \underbrace{a_{n+1}}_{<0} = P_{n+1}(a_{n+1}) \; \underline{< 0 \text{ при } n \geq 2019.}$$

С другой стороны, из 1 следует, что $P_{n+1}(x)$ при уменьшении x должен пересечь ось x, поэтому наименьший корень $P_{n+1} < a_{n+1}$, следовательно ~~Последовательность~~ наименьших корней убывает, ч.т.д.

Начиная с какого N?



Угловой коэффициент BD:

$$y = \frac{\sin\beta - \sin\varphi}{\cos\beta}\cancel{x} + \sin\varphi$$

сер.пер к BD проходит через начало координат, поэтому его уравнение:

$$y = \frac{\cos\beta}{\sin\varphi - \sin\beta}x \Rightarrow x = \frac{\sin\varphi - \sin\beta}{\cos\beta}y$$

~~Перес~~ Условие верно тогда и только тогда, когда пересечение серединных перпендикуляров к этим двум прямым в точке $y=1$:

$$1 = \frac{-\cos\beta}{\sin\beta+1}\left(\frac{\sin\varphi-\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\cos\beta + \cancel{\frac{(1+\sin\varphi)\cos\beta}{\sin\beta+1}}}{2}\right) + \frac{\sin\varphi+\sin\beta}{2}$$

почему равенство верно?

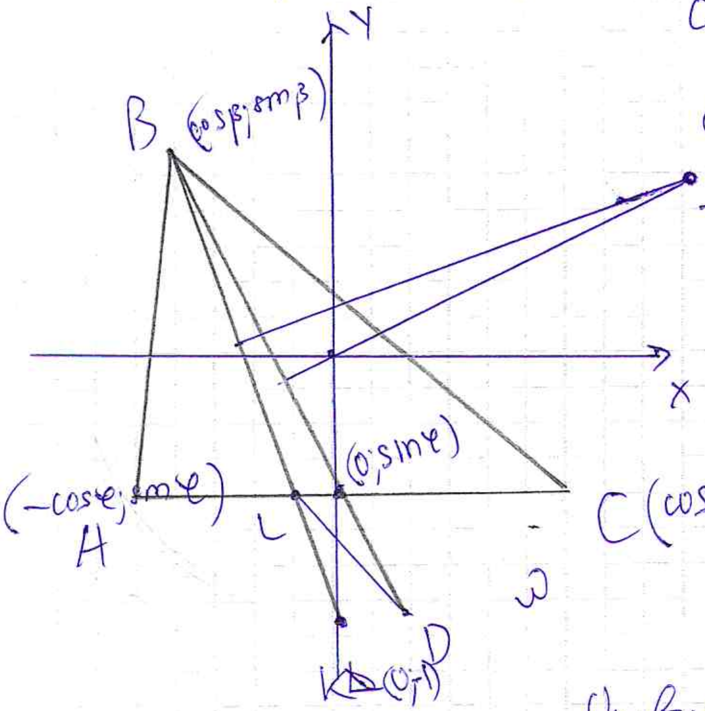
$$1 = \frac{\sin\beta-\sin\varphi}{\sin\beta+1} + \frac{\cos^2\beta}{2(\sin\beta+1)} - \frac{\cos^2\beta(1+\sin\varphi)}{(\sin\beta+1)^2 2} + \frac{\sin\varphi+\sin\beta}{2} \quad \Big| \cdot 2(\sin\beta+1)^2$$

Отсутствие аккуратной проверки: −1 балл.

$$2(\sin\beta+1)^2 = 2(\sin\beta+1)(\sin\beta-\sin\varphi) + \cos^2\beta(\sin\beta+1) - \cos^2\beta(1+\sin\varphi) + (\sin\varphi+\sin\beta)(\sin\beta+1)^2$$

— верное равенство при $\forall \beta, \varphi$, поэтому $y=1$ — точка пересечения серперов и $l \parallel AC$.

5. Заведем координаты так: ось x сонаправлена с AC, ось $y \perp AC$, радиус описанной окружности $= 1$.



Мы хотим доказать, что y-координата $T = 1$, что равносильно утверждению задачи.

Пусть $K \in BL \cap \omega$.

Очевидно, что $AK = \cancel{AC}$ KC, поэтому $K(0;-1)$.

Уравнение BK:

$$y = \frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta} x - 1$$

Найдем координаты точки L:

$y_L = \sin\varphi$

$$L\left(\frac{(1+\sin\varphi)\cos\beta}{\sin\beta + 1}; \sin\varphi\right)$$ ok

$$\sin\varphi = \frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta} x_L - 1$$

$$\frac{(1+\sin\varphi)\cos\beta}{\sin\beta + 1} = x_L$$

Отсюда уравнение сер.пер к BL: $k = \frac{-\cos\beta}{\sin\beta + 1}$ ok

$$y = \frac{-\cos\beta}{\sin\beta + 1}\left(x - \frac{\cos\beta + \frac{(1+\sin\varphi)\cos\beta}{\sin\beta+1}}{2}\right) + \frac{\sin\varphi + \sin\beta}{2}$$

1-10-01.

$\cancel{2\sin^2\beta} + 4\sin\beta + 2 = 2\sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\varphi - 2\sin\varphi \cancel{+2\sin\beta}$

$+\cos^2\beta\sin\beta \cancel{+\cos^2\beta} \cancel{-\cos^2\beta} - \cos^2\beta\sin\varphi + \sin\varphi\sin^2\beta + \sin\varphi 2\sin\beta + \sin$

$+\sin\beta\sin^2\beta \cancel{+2\sin\beta\sin\beta} \cancel{+\sin\beta}$

$\sin\beta + 2 = 2\sin^2\beta \cancel{-2\sin\beta\sin\varphi} - \sin\varphi + \cos^2\beta\sin\beta - \cos^2\beta\sin\varphi$

$+\sin\varphi\sin^2\beta \cancel{+\sin\varphi 2\sin\beta} \cancel{+\sin\varphi} + \sin\beta\sin^2\beta$

$\cancel{\sin\beta} + 2 = 2\sin^2\beta - \sin\varphi \cancel{+\cos^2\beta\sin\beta} - \cos^2\beta\sin\varphi +$

$\sin\varphi\sin^2\beta \cancel{+\sin\beta\sin^2\beta}$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

10 класс

Шифр 2-10-04

6	7	8	9	10	Σ
± АВ 7 + Т	+, ВМ ? 6	+ П.О. 7 АП	± К − 5 + ММ	? ВМ 1+1=2	26+1=27

6. Пусть числа равны

$a_1,\ a_1+1,\ a_1+2,\ a_1+3.$

Если $a_1+1 = xy \mid x,y>1$, то

$$a_1+(a_1+1)+a_1+2 = 3(a_1+1) = 3\cdot x\cdot y$$

Если $a_1+2 = xy \mid x,y>1$, то

$$(a_1+1)+(a_1+2)+(a_1+3) = 3(a_1+2) = 3\cdot x\cdot y.$$

Заметим теперь, что одно из чисел $a_1+1,\ a_1+2$ четно, поэтому в одном из случаев такие x и y существуют, например $\frac{t}{2}$ и 2, где t — четное число

почему $t/2>1,\ \neq 2,\ \neq 3$?
по условию все три множителя должны быть различны

7. Докажем, что $x_n - x_{n+1} > 0$.

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right) > 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$$

$$\frac{\sqrt[2^n]{b}}{2} - \frac{\sqrt[2^n]{a}}{2} > \sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}$$

$b > a > 1$

$b' = \sqrt[2^{n+1}]{b}$

$a' = \sqrt[2^{n+1}]{a}$

$\Downarrow$

$b' > a' > 1$

$$\frac{\sqrt[2^n]{b}}{2} - \sqrt[2^{n+1}]{b} > \frac{\sqrt[2^n]{a}}{2} - \sqrt[2^{n+1}]{a}$$

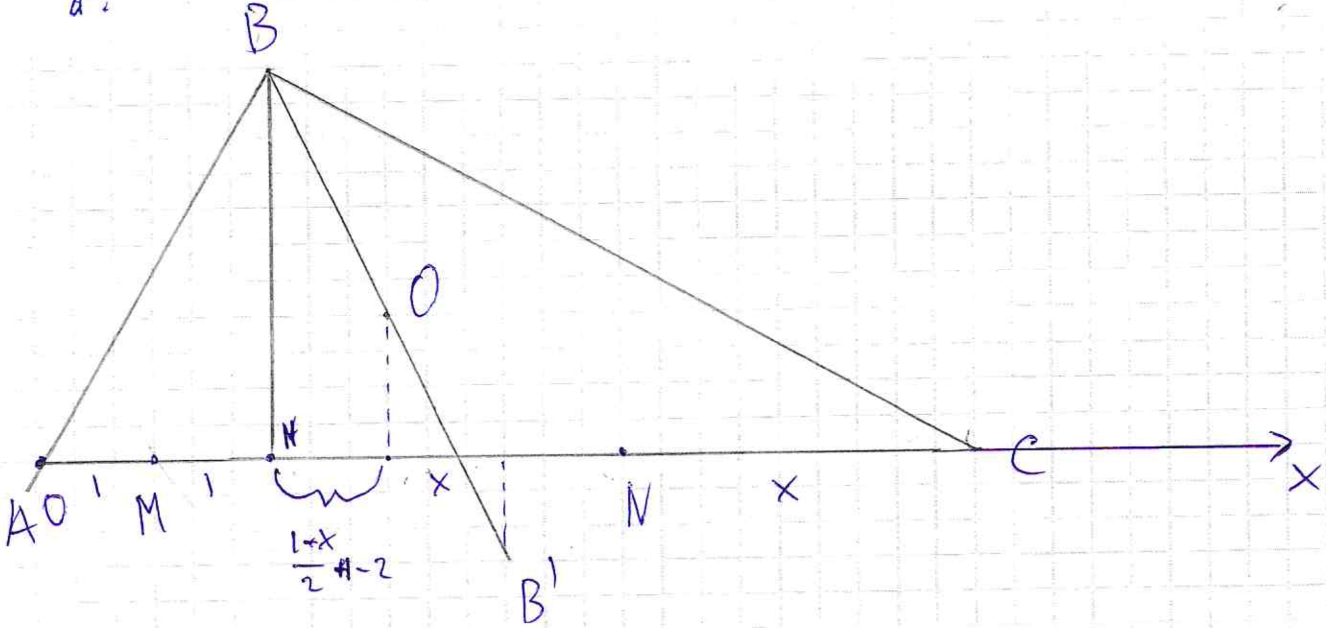
$$\frac{(b')^2}{2} - b' > \frac{(a')^2}{2} - a'$$ – верно, т.к

функция $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$ монотонно возрастает

на $(1; +\infty)$

$f'(x) = x - 1 > 0$

8.



Пусть ось $x \uparrow\uparrow AM$, $AM = 1$. ~~Заметим~~, $NC = x$.

Заметим, что $AB' = B'C$ равносильно тому, что координата B' равна $1+x$, ведь тогда B' лежит на ~~серпер~~ серединном перпендикуляре к AC.

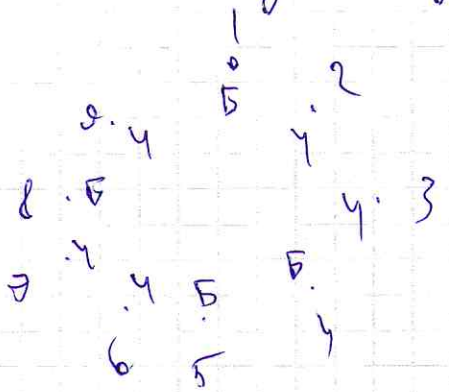
Координата центра окружности равна $1+\frac{1+x}{2}$.

Координаты точек B и B' противоположны, а $B = 2$ потому отн. O.

$$B' = \left(1+\frac{1+x}{2}\right)+\left(\frac{1+x}{2}-2\right) = 1+x,$$ ч.т.д.

⊕

9. ~~Лемма~~. Пусть мы будем называть количеством перемен цвета раскра~~чкра~~ски следующую величину. ~~Буд~~ ~~занумеруем вершины и будем идти начиная с 1 до 1, смотря тогда между соседними~~



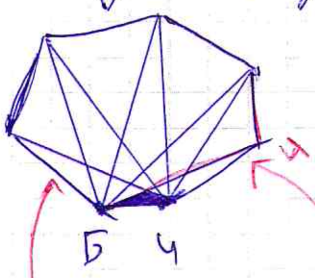
Это количество соседних пар вершин разных цветов.

Лемма.

У правильной раскраски количество не превосходит 2.

Д-во.

Очевидно, что в правильной раскраске есть 2 цвета. тогда очевидно, что есть 2 цвета рядом, не умаляя



общности белый и черный. Триангуляция есть, поэтому участок многоугольника, образованный всеми Δ, опирающимися

Почему?!

на выбранный нами отрезок должна принадлежать какому-то треугольнику разбиения. Заметим, что

Кому очевидно?!

одному из ~~тр~~ выбранных Δ, ~~иначе~~ Но очевидно, что

Вот этих?

одному из двух крайних, так как если в нем 2 начальных, что 3 вершина не может быть ни белой, ни черной.

Таким образом, либо вершина слева от отрезка белая, либо справа от отрезка черная. ~~Новый~~ многоугольник обладает тем же свойством,
какой какими?
~~поэтому~~ пока в оставшемся многоугольнике
каком?
~~хотя~~ бы 4 вершины. ∆ мы можем покрасить
ровно
в любой цвет. Таким образом, есть ~~одна~~ две пары – начальная и конечная, ч.т.д. Лемма +.

Очевидно, что если пар ровно две, ~~а~~ то ~~в~~ взяв одну пару за начальную мы ~~можем~~ м триангулировать многоугольник, ~~в~~ по ~~ал~~ ~~ал~~ алгоритму из леммы, взяв нужное количество белых и черных. ~~Ва~~ вершин. Каждой паре пар можно сопоставить 2 раскраски, ~~получ~~ получающиеся друг из друга сменой цвета; ~~из~~ Возьмем 2 пары, все ~~середины~~ вершины на одной дуге покрасим в 1 цвет, на ~~дв~~ ~~д~~ другой в 2 цвет. Способов взять пару
пар
= способов взять середину стороны
?
$= C_n^2$, поэтому n угольник
какой?
имеет $n(n-1)$ хорошую раскраску. +.

$2 \cdot C_n^2$?

10. Пусть какое-либо k не встречается. Тогда не существует ~~не~~ членов $k, 2k, 3k \dots nk \dots$

Заметим, что можно выбрать такое n, что $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] = \dots = [\sqrt{n+t}]$ для любого t.

Тогда мы понимаем, что существуют сколь угодно длинные арифметические прогрессии в этой последовательности. Рассмотрим одну из них.

Пусть $a_{n+i} = a_n + i\,a_{[\sqrt{n}]}$. Если какой-то из этих ~~чл~~ членов нацело делится на k, то задача доказана. Пусть нет. Тогда рассмотрим числа

$$a_{n} \% k$$
$$a_{n+1} \% k$$
$$\dots$$
$$a_{n+i} \% k$$

Они не равны нулю, но очевидно, что последовательность периодическая. Если $(k, \{a_{[\sqrt{n}]}) = 1$, то такая последовательность прошла бы через 0. Отсюда $k \in P$ это утверждение верно.

Отсюда следует, что $(k, a_{[\sqrt{n}]}) > 1$

2 - 10 - 04

Таким образом, для всех $\neq a_t$ для какого-то t_0

$|t > t_0$. Все числа невзаимнопросты с k

рассмотрим последовательность в поле по модулю k.

Тогда все числа пол попадают в промежуток $2 - k-2$,

иначе тогда в качестве шага мы возьмем 1 или

$k-1$ то придем в k

Возмо~~ж~~жны 3 случая:

1) Нашлись с какого места все числа a, делятся

на t, тогда сводим ~~к~~ задачу к нахождению $\frac{k}{t}$

2) В качестве шага мы можем ~~взять~~ взять

либо шаг, либо первый ~~чл~~ член, т.к что-либо

будет взаимнопросто с k,

Дальше?