Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

10 класс Шифр 1-10-04

10.1 Пусть рыцарей было 10. Тогда один сказал что его число больше 10, но во второй раз он ~~на~~ не мог сказать правду (т.к <1, <2 ... <10)
$\Downarrow$
Хотя бы один лжец есть

Пример

		число	I	II	
1	Р	1,5	>1	<2	
2	Р	2,5	>2	<3	
3	Р	3,5	>3	<4	
4	Р	4,5	>4	<5	
5	Р	5,5	>5	<6	
6	Р	6,5	>6	<7	
7	Р	7,5	>7	<8	
8	Р	8,5	>8	<9	
9	Р	9,5	>9	<10	
10	Л	7	>10	<1	— 2 лжи

Ответ: 9 рыцарей

1 v	2	3	4	5	Σ'
+ А.Б. 7 т	$\mp$ М 3 к	$\mp$ М 2 м	$\mp$ О.Ч 1	Φ п.о.	13

10.3 2016

Разобьем столбцы на пары.

Сумма чисел в столбце будет рациональна если числа равны R_1+Q, R_2-Q $(R_1+Q)+(R_2-Q)=R_1+R_2$, где Q – иррац.

конкретное число или у множества иррац-?

Пусть все 2019 чисел будут иррациональны. Тогда n чисел с $+Q$ и $2019-n$ чисел с $-Q$.

Но числа расположены парами $+Q$ и $-Q$ $\Rightarrow$ $n=2019-n$
$n=1009{,}5$

$\Downarrow$

2019 не могут быть. Пусть их 2018

По парам заполним 2016 столбиков. Осталось 3

каких? случаев?

a	b	c
b	c	a

Пусть $a+b=R$

если под b тоже поставить a, то останется столбик $c-c$, а числа должны быть разные

$\Downarrow$

Под b – c, $c-a$

$a+b=R_{ab}$
$b+c=R_{bc}$
$c+a=R_{ac}$

Пусть a и b – иррац.
$a=R_1+Q$ $b=R_2+Q$

$c=(R_{ac}-R_1)-Q$ $c=(R_{bc}-R_2)+Q$

$2Q=R_{ac}-R_{bc}+R_2-R_1$

$\Downarrow$

$Q\in R$

$\Downarrow$

a и b – рациональные

$\Downarrow$

2016 чисел.

Пример: каждые 2 столбика из первых 2016

$\sqrt{2}+n$	$n-\sqrt{2}$
$n-\sqrt{2}$	$n+\sqrt{2}$

Причем все n различны в каждой паре

$\underbrace{\text{1, 2}}_{\text{1 пара}}$ $\underbrace{\text{3, 4}}_{\text{2 пара}}$ $\underbrace{\text{5, 6}}_{\text{3 пара}}$ $\underbrace{\text{2015, 2016}}_{\text{1008 пара}}$

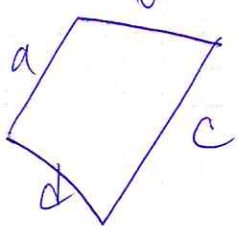
Σ $2n$ $2n$

1	2	3	4	5	6		2015	2016	2017	2018	2019
$\sqrt{2}+1$	$1-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+2$	$2-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+3$	$3-\sqrt{2}$	......	$\sqrt{2}+1008$	$1008-\sqrt{2}$	1	2	3
$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$3-\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$	......	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$	3	1	2

Σ 2 2 4 4 6 6 2016 2016 4 3 5

Ответ: 2016

10.2



$$a+b+c+d=10^{100}$$

$$a+b+c=nd$$
$$a+b+d=kc$$
$$a+c+d=mb$$
$$b+c+d=pa$$

$p, m, k, n, a, b, c, d \in \mathbb{N}$

$$3(a+b+c+d)=nd+kc+mb+pa$$

$$a+b+c+d=(n+1)d$$
$$a+b+c+d=(k+1)c$$
$$a+b+c+d=(m+1)b$$
$$a+b+c+d=(p+1)a$$

$$a+b+c+d=10^{100}=(p+1)a=(m+1)b=(k+1)c=(n+1)d$$

$$a=\frac{10^{100}}{p+1} \quad b=\frac{10^{100}}{m+1} \quad c=\frac{10^{100}}{k+1} \quad d=\frac{10^{100}}{n+1}$$

$$-\begin{array}{l} a+c+d=mb \\ b+c+d=pa \end{array}$$
$$a-b=mb-pa$$
$$(m+1)b=(p+1)a$$

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+1}=1$$

$$\frac{p}{p+1}+\frac{m}{m+1}+\frac{k}{k+1}+\frac{n}{n+1}=3$$

10.4 $$P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$$

$$a_{n+2}^2 P_n(a_{n+2}) + a_{n+1} = 0$$

$\frac{-}{0}$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

10 класс

Шифр 2-10-24

6	7	8	9	10	Σ
$+$ АВ	$+_{\circ}$ АВ	$+$ РБ	$\mp$ V	$-$ БМ	
7	6	7	0	0	20

6 Обозначим 4 числа как $x, x+1, x+2, x+3$

$x > 100$

I $x = 2k, \ k \geq 50$

Если x – четное, то выберем $x+1$, $x+2$ и $x+3$

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) = 3x + 6 = 6k + 6 = 6(k+1) = 2 \cdot 3 \underbrace{(k+1)}_{\geq 51}$$

$\Downarrow$

3 различных натуральных числа

II $x = 2k+1, \ k \geq 50$

Если x – нечетное, то выберем x, $x+1$, $x+2$, ~~x+3~~

$$x + (x+1) + (x+2) = 3x+3 = 6k+6 = 6(k+1) = 2 \cdot 3 \underbrace{(k+1)}_{\geq 51}$$

$\Downarrow$

3 различных натуральных числа

(7) $X_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$

Обозначим $\sqrt{b} = k$ $\quad \sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{\sqrt{b}} = \sqrt[2^n]{b}$

$\sqrt{a} = p$

$X_n = 2^n \left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{p}\right)$

~~Вы~~ Доказать: $X_{n+1} < X_n$

$2^{n+1}\left(\sqrt[n+1]{k} - \sqrt[n+1]{p}\right) < 2^n\left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{p}\right)$

$2\left(\sqrt[n+1]{k} - \sqrt[n+1]{p}\right) < \sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{p}$

$b > a \Rightarrow k > p \Rightarrow \sqrt[n+1]{k} > \sqrt[n+1]{p} \Rightarrow \sqrt[n+1]{k} - \sqrt[n+1]{p} > 0$

$2 < \dfrac{\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{p}}{\sqrt[n+1]{k} - \sqrt[n+1]{p}}$

$2 < \dfrac{k^{\frac{1}{n}} - p^{\frac{1}{n}}}{k^{\frac{1}{n+1}} - p^{\frac{1}{n+1}}}$

$\dfrac{k^n - p^n}{k^m - p^m} = \dfrac{k^{n-m}(k^m - p^m) + k^{n-m}p^m - p^n}{k^m - p^m} = k^{n-m} + \dfrac{k^{n-m}p^m + p^{n-m}(k^m - p^m) - p^{n-m}k^m}{k^m - p^m} =$

$= k^{n-m} + p^{n-m} + \dfrac{k^{n-m}p^m - p^{n-m}k^m}{k^m - p^m}$

(7) Доказать: $X_{n+1} < X_n$

$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) < 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$

Пусть $\sqrt[2^n]{b} = k$ $\quad \sqrt[2^{n+1}]{b} = \sqrt[2\cdot 2^n]{b} = \sqrt{\sqrt[2^n]{b}} = \sqrt{k}$

Аналогично $\sqrt[2^n]{a} = p$ $\quad \sqrt[2^{n+1}]{a} = \sqrt{p}$

$2\left(\sqrt{k} - \sqrt{p}\right) < k - p$

$2\left(\sqrt{k} - \sqrt{p}\right) < \left(\sqrt{k} + \sqrt{p}\right)\left(\sqrt{k} - \sqrt{p}\right)$

7 $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$

$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$

Если $x_1, x_2, x_3 \ldots$ убывает, то $x_{n+1} < x_n$

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) < 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$$

$$2\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) < \sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}$$

Пусть $\sqrt[2^n]{b} = k$
$\sqrt[2^n]{a} = p$ $\qquad b > a > 1$

$$\Downarrow$$

$$k > p > 1$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{\sqrt[2^n]{b}} = \sqrt[2\cdot 2^n]{b} = \sqrt[2^{n+1}]{b}$$

Аналогично $\sqrt{p} = \sqrt[2^{n+1}]{a}$

$$2\left(\sqrt{k} - \sqrt{p}\right) < k - p$$

$$2\left(\sqrt{k} - \sqrt{p}\right) < \left(\sqrt{k} - \sqrt{p}\right)\left(\sqrt{k} + \sqrt{p}\right)$$

$$k > p \Rightarrow \sqrt{k} > \sqrt{p} \Rightarrow \sqrt{k} - \sqrt{p} > 0$$

$$2 < \sqrt{k} + \sqrt{p}$$

$$\left.\begin{array}{l} a > 1 \Rightarrow \sqrt[2^n]{a} > 1 \Rightarrow k > 1 \Rightarrow \sqrt{k} > 1 \\ b > 1 \Rightarrow \sqrt[2^n]{b} > 1 \Rightarrow p > 1 \Rightarrow \sqrt{p} > 1 \end{array}\right\} +$$

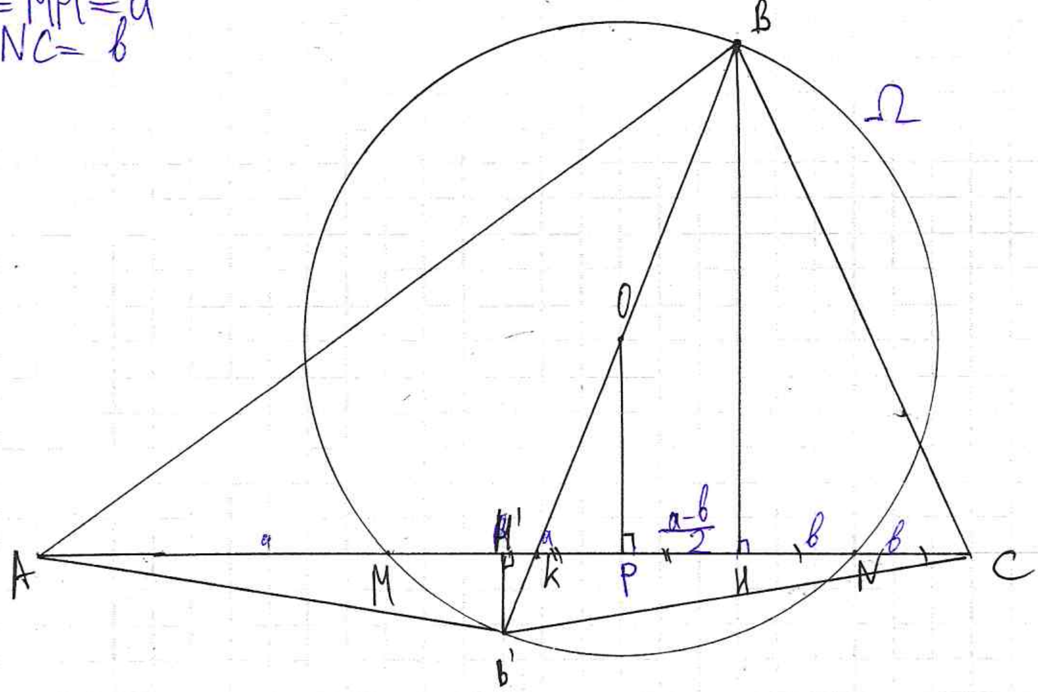
$$\sqrt{k} + \sqrt{p} > 2$$

$$\Downarrow$$

верно и $x_{n+1} < x_n$

8

$AM = MH = a$
$HN = NC = b$

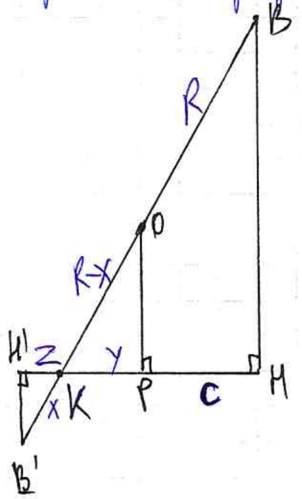


O - центр описанной окружности $\triangle BMN$
$\Downarrow$
O лежит на серединном перпендикуляре MN

Отпустим перпендикуляр OP на MN $MP = PN = \frac{MN}{2} = \frac{MH+HN}{2} = \frac{a+b}{2}$

$PH = MH - MP = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = c$

Отпустим перпендикуляр из B'H' на MN



$OB = OB' = R$

Пусть $B'K = X$, тогда $OK = R - X$
$H'K = Z$
$KP = Y$

$OP \parallel BH \parallel H'B' \Rightarrow \triangle H'KB' \sim \triangle PKO \sim \triangle HKB$

$\triangle KOP \sim \triangle KBH$

$\frac{KP}{KH} = \frac{KO}{KB}$

$\frac{Y}{Y+C} = \frac{R-X}{2R-X}$

$2RY - \cancel{XY} = \cancel{RY} + Rc - \cancel{XY} - Xc$

$Xc = R(c - Y)$

$X = R\left(1 - \frac{Y}{c}\right)$

$\triangle KH'B' \sim \triangle KPO$

$\frac{KH'}{KP} = \frac{KB'}{KO}$

$\frac{Z}{Y} = \frac{X}{R-X} = \frac{\cancel{R}\left(1-\frac{Y}{c}\right)}{\cancel{R}\left(1-\left(1-\frac{Y}{c}\right)\right)} = \frac{1-\frac{Y}{c}}{\frac{Y}{c}}$

$\frac{ZY}{c} = \cancel{Y} - \frac{Y^2}{c}$

$Z = C - Y$

$Z + Y = C = H'P$

$H'P = PH = \frac{a-b}{2}$

$AH' = \cancel{H}\ \cancel{2a}\ AH - H'H = 2a - 2c = 2a - (a-b) = a+b$

$H'C = HC + H'H = 2b + 2c = 2b + (a-b) = a+b$

$AH' = H'C$, при этом BH' – высота $\triangle ACB'$

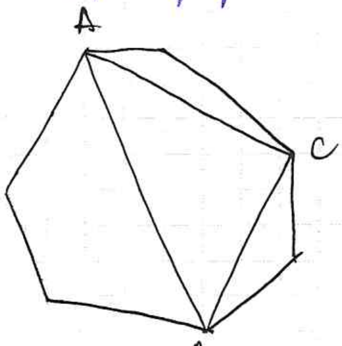
$\Downarrow$

$\triangle ACB'$ – равнобедренный, т.к. BH' – медиана и высота

$\Downarrow$

$AB' = CB'$ ⊕

10.9 При разбиении не может образовываться „внутренний" треугольник



Пусть он образовался.

тогда A и B разного цвета

A и C разного, а всего 2 возможных

$\Downarrow$

B и C одинакового, а так нельзя

$\Downarrow$

„внутренних $\triangle$ нет.

У каждого $\triangle$ хотя бы одна сторона – сторона многоугольника

n-угольник разбивается на n−2 треугольника

$\Downarrow$

Есть 2 $\triangle$, у которых 2 ~~соседни~~ стороны – соседние стороны многоугольника

При
$n=4$ 12
$n=5$ 18
$n=6$ 30

$n(n-1)$ хороших раскрасок

Откуда?

10.10 Заметим, что $a_n = 3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + 9a_4 + 11a_5 \ldots (n - [\sqrt{n}]^2 + 1) a_{[\sqrt{n}]}$

$$a_n = \sum_{i=[\sqrt{n}]-1} (2i+1) a_i + (n - [\sqrt{n}]^2 + 1) a_{[\sqrt{n}]}$$

$a_1 = a_1$

$a_4 = 3a_1 + a_2$

$a_9 = 3a_1 + 5a_2 + a_3$

$a_{10} = 3a_1 + 5a_2 +$