Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 1-10-05

№1	2	3	4	5	Σ
$+_{АВ}$	$+_{мм}$	$+_{Б}$	$+_{АИ}$	$\overline{п}$ ПО.	
7_T	7	7	7	0	28

(1) Ответ: 9.

Пример:

загаданное число	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	5
сказал сначала	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10
сказал потом	<2	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1
тип	р	р	р	р	р	р	р	р	р	л

Запись "$>k$" во 2-й строке означает, что соотв. человек сказал "мое число больше k".
Запись "$<k$" в 3-й строке — " — "мое число меньше k".
"р", "л" — рыцарь, лжец соотв.

Оценка: Предположим, рыцарей было 10.
Тогда т.к. число 1-го больше 1, 2-го — больше 2, ..., k-го больше k, .. 10-го больше 10, сумма всех этих десяти чисел больше

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55.$$

С другой стороны, т.к. эти 10 чисел (в каком-то порядке) меньше 1, меньше 2, ..., меньше k .., меньше 10, их сумма меньше

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55.$$

Т.о. эта сумма с одной стороны больше 55 а с другой — меньше. Противор. т.о. рыцарей ≤ 9. Ответ: 9.

(2) Лемма 1 ~~Длина~~ Любая сторона четырехугольника — делитель 10^{100}. +

Д-во: Пусть a — какая-то сторона, b, c, d — три оставшиеся. Из условия
$(b+c+d) \vdots a$
$(10^{100} - a) \vdots a$
$10^{100} \vdots a$. ЧТД.

$\frac{10^{100}}{2} = 5 \cdot 10^{99}$

Лемма 2 Любая сторона имеет длину ~~не больше~~ меньше $5 \cdot 10^{99}$. +

Д-во: Предпол. противное, какая-то сторона $a \geq 5 \cdot 10^{99}$. Пусть b, c, d — три другие.
Тогда $b+c+d = 10^{100} - a \leq 10^{100} - 5 \cdot 10^{99} = 5 \cdot 10^{99}$
Тогда сумма ~~длин~~ трех сторон не превышает длину четвертой, так не бывает. Противор. ЧТД

Заметим теперь, что 3 наибольших делителя 10^{100} таковы: 10^{100}, $\frac{10^{100}}{2}$, $\frac{10^{100}}{4}$, ...
(Действительно, $\frac{10^{100}}{3}$ — не целое число, а 3 указанных — целые)
10^{100} не может быть ~~стороной~~ стороной. $\frac{10^{100}}{2}$ не может быть стороной по ~~лемме~~ 2. Тогда все стороны $\leq \frac{10^{100}}{4}$ (т.к. все стороны — делители 10^{100} по лемме 1)
Тогда ~~их сумма~~ периметр $\leq 4 \cdot \frac{10^{100}}{4} = 10^{100}$.
Тогда т.к. достигается равенство, и для сторон достигается равенство, т.е. все стороны $\frac{10^{100}}{4}$.
Но выпукл. четырехуг. с равными сторонами — ромб. ЧТД.

③ Ответ: 2016.

Рассм.! такой граф: 2019 вершин соотв. ~~числам, написанным в 1й строке~~. Всем тем 2019 разл. числам, которые встретились в таблице.

А 2019 ребер соотв. 2019-и столбцам: для кажд. столбца проведем ребро между числами, стоящими в нем.

При этом в графе могут быть кратные ребра, но не петли (т.к. в кажд. столбце числа разные).

~~Тогда~~ Тогда степень кажд. вершины 2, иначе граф разбивается на циклы.

Лемма На нечетном цикле все ~~рц~~ числа рациональны

Д-во: Пусть $a_1, \dots, a_{2k+1}$ — числа на нем в порядке следования. Тогда

$$\begin{cases} a_1+a_2 \in \mathbb{Q} \\ \vdots \\ a_i+a_{i+1} \in \mathbb{Q} \\ \vdots \\ a_{2k}+a_{2k+1} \in \mathbb{Q} \\ a_{2k+1}+a_1 \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Сумма всех таких выр-й тоже рациональна

$$(a_1+a_2)+\dots+(a_i+a_{i+1})+\dots+(a_{2k}+a_{2k+1})+(a_{2k+1}+a_1) \in \mathbb{Q}$$

$$2(a_1+\dots+a_i+\dots+a_{2k+1}) \in \mathbb{Q}$$

$$a_1+\dots+a_i+\dots+a_{2k+1} \in \mathbb{Q}$$

$$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\dots+(a_{2i-1}+a_{2i})+\dots+(a_{2k-1}+a_{2k})+a_{2k+1} \in \mathbb{Q}$$

$$a_{2k+1} \in \mathbb{Q}$$

~~таким же образом пронумеровав~~

Таким же образом ~~пронумеровав~~ пронумеруя числа, начиная с другого, получим

| что все числа — рациональные. ЧТД.

Заметим теперь, что нечетный цикл есть (т.к. всего 2019 вершин), и что длина любого из циклов ≥ 3 (т.к. нет петель).

Т.о. ≥ 3 числа рациональных (≤ 2016 иррациональны).

Пример:

$1+\sqrt2$	$1-\sqrt2$	$2+\sqrt2$	$2-\sqrt2$		$k+\sqrt2$	$k-\sqrt2$		$1008+\sqrt2$	$1008-\sqrt2$	1	2	3
$1-\sqrt2$	$1+\sqrt2$	$2-\sqrt2$	$2+\sqrt2$	...	$k-\sqrt2$	$k+\sqrt2$	...	$1008-\sqrt2$	$1008+\sqrt2$	2	3	1

(В верхней строке все числа различны. Действительно, последние 3 — рациональны, а первые 2016 — нет. Последние 3 различны. Первые 2016 разл., т.к.

$i\pm\sqrt2 \neq j\pm\sqrt2 \iff i\neq j \quad (i,j\in\mathbb{N})$

$i+\sqrt2 \neq j-\sqrt2 \iff j-i\neq 2\sqrt2 \quad (i,j\in\mathbb{N})$ правда)

④ Лемма $a_n<0$ (для $n\geq 2019$)

[Док: Предпол. противное, $a_n>0$ ($a_n\neq 0$ по условию), a_n — наим. корень ур-я

$$P_{n-1}(x)=0.$$

[т.к. $P_n(-x)=(-x)^{2n}+a_1(-x)^{2n-2}+\ldots+a_n(-x)^0=x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\ldots+a_nx^0=P_n(x)$]

Но тогда $P_{n-1}(a_n)=0$, $P_{n-1}(-a_n)=P_{n-1}(a_n)=0$.

~~(т.к. в P_{n-1} все четн.)~~

Тогда $(-a_n)$ — корень P_{n-1}, тогда a_n — не наим. его корень. Противор. ЧТД. ✓

]

Заметим теперь, что

$$P_{n+1}(x)=x^2P_n(x)+a_{n+1}$$

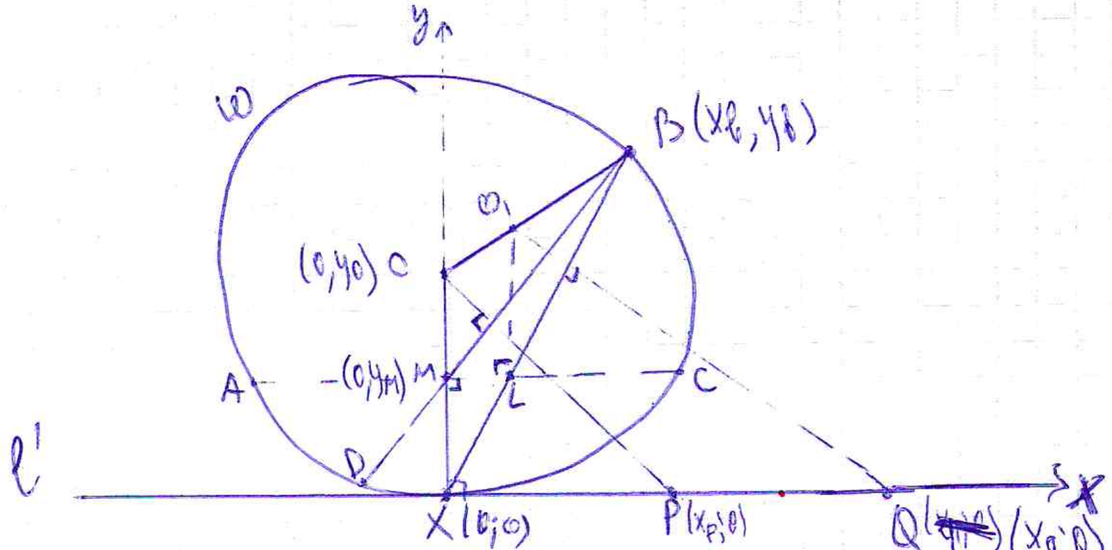
Тогда при $n\geq 2018$

$\cancel{P_{n+1}(a_{n+1})}$ $P_{n+1}(a_{n+1})=x^2P_n(a_{n+1})+a_{n+1}=a_{n+1}$

Т.к. $a_{n+1}<0$, $P_{n+1}(a_{n+1})<0$, но тогда наименьший корень P_{n+1} меньше a_{n+1} (т.к. $P_{n+1}(x)$ положителен ~~при достаточно малых x и непрерывен~~ при аргументах, меньших наименьшего корня, т.к. имеет четную степень с положит. старш. коэф.), $a_{n+2}<a_{n+1}$ (для $n\geq 2018$). ЧТД.

Xх 11/II 2019

(5)



Пусть M — середина AC, O — центр ω, X — середина дуги AC.

P! окр. Ω, кас. AC в тчк. L, кас. ω (причем тчк. кас. и B по одну сторону от AC). Эта окр. кас. ω в B', ~~т.к.~~ ~~по лемме~~

B', L, X — коллинеарны по лемме Архимеда, а B, L, X коллинеарны т.к. BL — биссектриса, тогда $B' \equiv B$.

Пусть O_1 — центр Ω.

Почему O_1 лежит на отрезке OB?

$OX \cap AC = M$, $OX \perp AC$.

$O_1 L \perp AC$ (т.к. AC — касат. Ω.)

$\Delta OXB \sim \Delta O_1 LB$ (т.к. они равнобедр. и $\angle OXB = \angle O_1 LB$ из $\begin{cases} OX \perp AC \perp O_1 L \\ BL \equiv XB \end{cases}$) $\Rightarrow$ O, O_1, B — коллинеарны.

Пусть l' — касат. ω в тчк. X.

Пусть серпер BD пересекает l' в P.

Пусть ~~Отпер~~ серпер BL пересекает l' в Q.

Введем систему координат с осями l' и XO.

Пусть так: $O(0; y_0)$, $M(0; y_m)$, $B(x_B; y_B)$, $P(x_p; 0)$, $Q(x_q; 0)$, $X(0,0)$.

$BM \perp OP$ (т.к. OP – серпер BD) $\Rightarrow$

$$\frac{y_b - y_m}{x_b} \cdot \frac{y_0}{-x_p} = -1.$$

$$x_p = \frac{y_0}{x_b}(y_b - y_m) \text{ ок}$$

Пусть $L(x_l; y_m)$

имеем (X, L, B коллин):

$$\frac{y_b}{x_b} = \frac{y_m}{x_l} \text{ ок}$$

$$x_l = \frac{y_m x_b}{y_b} \Rightarrow L\left(\frac{y_m x_b}{y_b}; y_m\right) \text{ ок.}$$

Пусть $O_1\left(\frac{y_m x_b}{y_b}; y_{o_1}\right)$. Ит O, O_1, B коллин:

$$\frac{\frac{y_m x_b}{y_b} - 0}{x_b - 0} = \frac{y_{o_1} - y_0}{y_b - y_0}$$

$$\frac{y_m}{y_b} = \frac{y_{o_1} - y_0}{y_b - y_0}$$

$$y_{o_1} = \frac{y_m}{y_b}(y_b - y_0) + y_0 = y_m + y_0 - \frac{y_m y_0}{y_b}$$

$$O_1\left(\frac{y_m x_b}{y_b}; y_m + y_0 - \frac{y_m y_0}{y_b}\right) \text{ ок.}$$

$XB \perp O_1Q$ (т.к. O_1Q – серпер LB):

$$\frac{y_b}{x_b} \cdot \frac{y_m + y_0 - \frac{y_m y_0}{y_b}}{\frac{y_m x_b}{y_b} - x_q} = -1.$$

$$\frac{y_m x_b}{y_b} - x_q = \frac{y_b}{x_b}\left(\frac{y_m y_0}{y_b} - y_m - y_0\right)$$

$$x_q = \frac{y_m x_b}{y_b} - \frac{y_m y_0}{x_b} + \frac{y_m y_b}{x_b} + \frac{y_0 y_b}{x_b} \text{ ок.}$$

1-10-05

Осталось доказать

$$x_p = x_q$$

$$\frac{y_0 y_b}{x_b} - \frac{y_0 y_M}{x_b} = \frac{y_M x_b}{y_b} - \frac{y_M y_0}{x_b} + \frac{y_M y_b}{x_b} + \frac{y_0 y_b}{x_b}$$

$$\frac{y_M x_b}{y_b} + \frac{y_M y_b}{x_b} = 0$$

$$\frac{x_b}{y_b} + \frac{y_b}{x_b} = 0 \quad | \cdot x_b y_b$$

$$x_b^2 + y_b^2 = 0,$$

Тогда B совпадает с нач. коорд? Это не всегда так.

С другой стороны

$$OX^2 = OB^2$$

$$y_0^2 = x_b^2 + (y_b - y_0)^2$$

$$2y_0 y_b = x_b^2 + y_b^2$$

Т.е. $P \equiv Q$, ~~…~~ ~~…~~ $l' \equiv l$ ~~(X касат. ω)~~ (т.к. $l' \parallel AC$), тогда l кас. AC, чтд.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 2-10-19

6	7	8	9	10	Σ
+ + 7 АБ	+. ВМ ~~6~~ + 7 ВМ	+ п.о. 7 АБ	+. К 6 ММ	∓? ВМ К ∓ 2	~~28~~ 29

(6) Возьм эти числа — a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ $(a>100)$.

Сумма первых трех у них:

$$a+a+1+a+2=3a+3=3(a+1)$$

Сумма последних трех:

$$a+1+a+2+a+3=3a+6=3(a+2)$$

Р! случаи:

1) $a \vdots 2$. $b:=\frac{a}{2}$ $(b>50, b\in\mathbb{N})$

тогда сумма $a+1, a+2, a+3$: $3(a+2)=$ ~~3·2(~~ $3\cdot2\cdot(b+1)$

~~При эт~~

Числа $2, 3, b+1$ — различные (т.к. $b+1>51$), натуральные (т.к. $b\in\mathbb{N}$), большие 1.

2) $a \not\vdots 2$. $b:=\frac{a-1}{2}$ $(b>\frac{100-1}{2}>\frac{98}{2}=49, b\in\mathbb{N})$

Тогда сумма $a, a+1, a+2$ равна: $3(a+1)=3(2b+2)=3\cdot2\cdot(b+1)$

Числа $2, 3, b+1$ — различные (т.к. $b+1>50$), натуральные (т.к. $b\in\mathbb{N}$), большие 1

(7) Покажем, что (для $n\in\mathbb{N}$):

$$x_{n+1}<x_n$$

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b}-\sqrt[2^{n+1}]{a}\right)<2^n\left(\sqrt[2^n]{b}-\sqrt[2^n]{a}\right)$$

Обозначим $c:=\sqrt[2^n]{a}$, $d:=\sqrt[2^n]{b}$ (ясно, что $d>c>1$ ($\Leftarrow b>a>1$))

Т.о. осталось доказать

$$2(\sqrt{d}-\sqrt{c})<d-c$$

шпак ↑

$$c - 2\sqrt{c} < d - 2\sqrt{d}$$

~~Для этого достаточно показать, что ф-я $f(x) := x - 2\sqrt{x}$ возрастает на $[1, +\infty)$.~~

Обозначим $t := \sqrt{c}$, $s := \sqrt{d}$ ($d > c > 1 \Rightarrow s > t > 1$).

Осталось показать, что

$$t^2 - 2t < s^2 - 2s$$

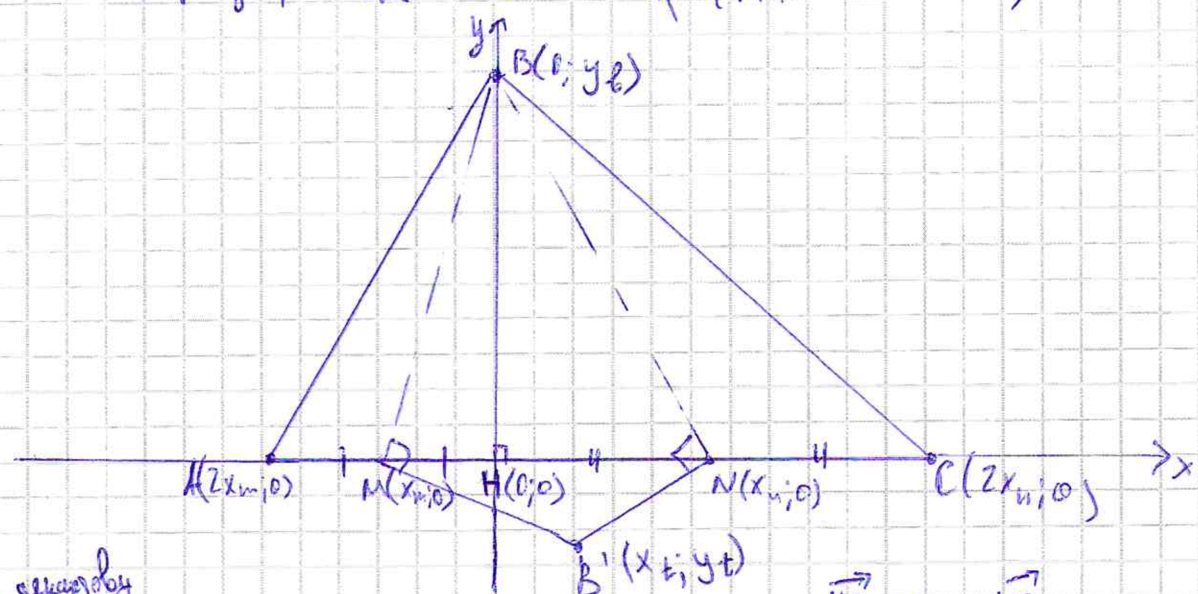
$$2(s-t) < (s-t)(s+t)$$

Сократим на $s - t > 0$!

$$2 < s + t$$

Это правда, т.к. $s > t > 1$. ($\begin{cases} s>1 \\ t>1 \end{cases} \Rightarrow t+s>2$)

(8)



Введем декартову сист. коорд. с лучами, содержащими $\vec{HC}$ и $\vec{HB}$. Тогда $H(0;0)$. Обозн $N(x_n;0)$, $M(x_m;0)$. Тогда $C(2x_n;0)$, $A(2x_m;0)$.

Коэф. наклона MB: $\frac{y_b}{-x_m}$ ($x_m \neq 0$ т.к. треуг. остроуг.). Тогда т.к. $BM \perp MB'$ (т.к. BB' — диам. окр., опис. вокруг BMB'), коэф. наклона MB': $\frac{x_m}{y_b}$.

т.к. MB' прох. ч/з $M(x_m;0)$, ее ур-е:

$$y = x \cdot \frac{x_m}{y_b} - \frac{x_m^2}{y_b}$$

Коэф. наклона NB: $\frac{y_b}{-x_n}$ ($x_n \neq 0$ т.к. треуг. остроуг.) Тогда т.к. $BN \perp B'N$ (т.к. BB' — диаметр окр. опис. вокруг BNB'), коэф. наклона NB': $\frac{x_n}{y_b}$.

т.к. NB' прох ч/з $N(x_n;0)$, ее ур-е:

$$y = x\cdot\frac{x_n}{y_b} - \frac{x_n^2}{y_b}$$

Тогда для ~~$B'(x_b; y_b)$ имеем~~ $B'(x_t; y_t)$ имеем:

~~$y_b =$~~

$$\begin{cases} y_t = x_t\cdot\frac{x_m}{y_b} - \frac{x_m^2}{y_b} \\ y_t = x_t\cdot\frac{x_n}{y_b} - \frac{x_n^2}{y_b} \end{cases}$$

$$x_t\cdot\frac{x_m}{y_b} - \frac{x_m^2}{y_b} = x_t\cdot\frac{x_n}{y_b} - \frac{x_n^2}{y_b} \quad \Big| \cdot y_b$$

$$x_t x_m - x_m^2 = x_t x_n - x_n^2$$

$$x_t(x_m - x_n) = (x_m - x_n)(x_m + x_n) \quad \Big| :(x_m - x_n)$$

[$x_m - x_n \neq 0$ т.к. иначе A, C совпадали бы]

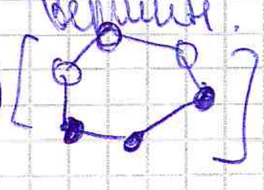
$$x_t = x_m + x_n$$

$$x_t = \frac{2x_m + 2x_n}{2}$$

т.е. B' проецируется на ось x в ~~точку~~, середину AC. Тогда $AB' = B'C$. ч.т.д.

(9) Опр Делящая раскраска — такая раскраска, в которой все черные вершины образуют несколько (быть может, одну, но не все и не ноль) последовательных вершин.

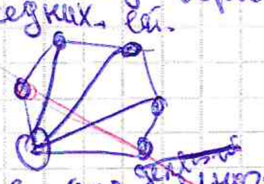
Лемма 1 Делящая раскраска — хорошая (для n-угольника, $n \geq 3$)



Индукция по числу вершин.

База (какого-то цвета одна вершина).

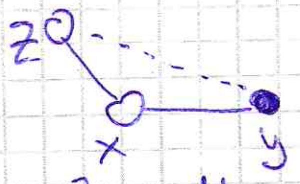
достаточно соединить эту вершину со всеми остальными, кроме соседних ей.



Переход (докажем утв-е для многоуг. с (n+1) вершиной в делящей раскраске, в которой каждого цвета хотя бы 2 вершины, воспользовавшись утв-ем для некоторого многоуг. с n вершинами и делящей раскраской)

Возьмём ~~по~~крытую (в том смысле, что её сосед чёрный) белую вершину (X). Пусть её чёрный сосед — Y, а белый (он есть, т.к. белых верш. ≥ 2) — Z.

~~Ошибка! Остаться могут все чёрные вершины~~



Соединим Y и Z. Многоугольник, образованный удалением треугольника XYZ от него, имеет делящую раскраску. Применив утв-е для него, разрезаем ост. часть.

еще раз определяете?

Опр Делящая раскраска — раскраска, в которой разноцветных ~~соседей~~ пар соседей ровно 2.

[Ясно, что это опр. равносильно первому].

Лемма 2 Раскраска, которая не явл. делящей не является разноцветной (для ~~n ≥ 4~~ n-угольника, n ≥ 3 кроме треугольника покрашенного в одну ~~[illegible]~~

А это что?

Если в раскраске < 2 (т.е. 0) разноцветных пар соседей она полностью одного цвета. Такая раскраска, очевидно, ~~неразноцветна~~ не хороша (т.к. в ней нельзя провести ни одного ребра), кроме случая одноцветного треугольника.

Догадался! Хороший!

Пусть разноцв. пар соседей > 2. Докажем ~~по~~ для такого много[угольника] индукцией (по числу вершин).

четырехугольника?

~~База~~ Переход (и база) ~~Возьмем пару~~ Для треугольника утв. очевидно (т.к. таких треугольников не бывает).

Предположим, ~~раскраска~~ есть триангуляция ∃-ить.

~~Возьмем~~

Возьмём какую-то разноцветную пару соседей (X и Y). Пусть XYZ — треугольник триангуляции, прилежащий к XY. Ясно, что Z — сосед X или Y (иначе эт X и Z были разн. цвета, Y и Z — тоже разн. цвета, тогда X и Y одного цвета) -!

Перепутал необходимость и достаточность?

Заметим, что Z одного цвета с Y и другого с ~~X~~ X (если Z – сосед Y); и одного цвета с X и другого с Y (если Z – сосед X).

Р! многоуг., получаемый отрезанием треугольника XYZ. Он ~~разноцветный~~ имеет хорошую раскр. (т.к. он триангулирован).

С др. стороны ~~мн~~ в нём столько же пар разноцветных соседей, сколько в нашем (XY – убрали, XZ или YZ – добавили). Но тогда по предпол. индукции он не разноцветный. Противоречие. Значит ~~наш~~ наш многоуг. ~~разноцвет.~~ не имеет хор. раскраску. ЧТД.

Лемма 3 Делящих раскрасок n-угольника ($n \geq 3$) n^2-n штук.

~~Занумеруем вершины по порядку: 1, 2, ..., n. Поставим делящей раскраске в соответствие пару (i; j) – таким образом, что черные вершины – вершины с номерами $k \in [i; j]$ (если $i \leq j$) и~~

Посмотрим, сколько есть делящих раскрасок с k ($1 \leq k \leq n-1$) вершинами. Их n штук, т.к. есть n наборов последовательных k вершин.
Т.о. делящих раскрасок $(n-1)\cdot n = n^2-n$.

Т.о. (для $n \geq 4$) ~~для~~ раскраска делящая $\Leftrightarrow$ раскраска хорошая (из лемм 1, 2), а из Леммы 3 их n^2-n штук.

Ответ: n^2-n.

Примечания:

1) ~~везде~~ под соседями, соседними вершинами понимаются соседние по стороне вершины многоугольника
2) Разноцветная диагональ и хорошая раскраска 3-угольника определяются ~~так же~~ достаточно, как в условии (любая раскраска треугольника хорошая)
3) под многоугольником везде понимается выпуклый многоугольник
4) под [illegible] понимается разбиение на треугольники [illegible]

(10) ~~\...~~ Опр Нормальное число — число x, ~~для которого такое,~~ что $\forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N : \quad (a_n ; x) = 1$.

Утв x — нормальное $\Leftrightarrow$ $rad(x)$ — нормальное

Ясно из того, что $(a; x) = 1 \Leftrightarrow (a; rad(x)) = 1$.

$$\left[rad(x) := \prod_{\substack{p \text{ — простое} \\ p \mid x}} p \right].$$

Лемма 1 k — нормальное $\Rightarrow$ утв. задачи верно для k.

Пусть n таково, что $(a_n; k) = 1$ и $n > k$.

Ясно, что для $t \in [0; 2n+1] \cap \mathbb{Z}$

$$a_{n^2+t} = a_{n^2} + t a_n$$

тогда т.к $(a_n; k) = 1$, по модулю k $t a_n$ принимает все выч. остатки (т.к. t принимает все выч. ост., т.к. $2n+1 > n > k$). Тогда a_{n^2+t} при каком-то t кратно k. ЧТД.

Лемма 2 ~~если p — простое, то~~ простое число p (а значит и степени простого) — нормальное

Предположим противное, с какого-то момента все a_n кратны p.

Пусть тогда m — наибольшее m, что $a_m \not\vdots\, p$.
(такое есть, т.к. $a_1 = 1 \not\vdots\, p$).

~~тогда $a_{m+1} \vdots\, p,\ a_{m+2} \vdots\, p \Rightarrow a_{[\sqrt{m+1}]}$~~

$\forall x > m$:

$a_x \vdots\, p,\ a_{x+1} \vdots\, p \Rightarrow a_{[\sqrt{x}]} \vdots\, p$.

но тогда все для $z \geq [\sqrt{m+1}]$: $a_z \vdots\, p$.

тогда

$\sqrt{m+1} \geq m+1$.

и $m+1 = 1$.

Противор (т.к. $m \geq 1$). ЧТД.

Предложение Если $(x; y) = 1$, x, y — нормальные, то (xy) — нормальное.