Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

1-10-09

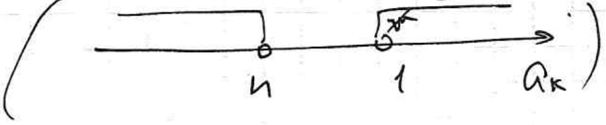
10 класс

Шифр 1-10-09

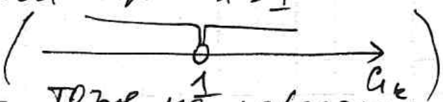
1	2	3	4	5	Σ
+ 7	−. 7	+. 7	∓ 0	∅	15

10.1.

Посмотрим на высказывание из вторых десяти: $a_k < 1$ оно было сказано человеком, который говорил $a_k > n$ при $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ т.к. выполнятся одновременно $\begin{cases} a_k < 1 \\ a_k > n \end{cases}$ не могут



ну или при $n = 1$



тоже не пересекаются

Тогда среди 10 человек, тот кто говорил $a_k < 1$ точно лжец $\Rightarrow$ больше 9 рыцарей быть не могло. Пример на 9:

Например числа:

1.	$a_1 > 1$	$a_8 < 2$	$a_1 = 1,5$
2.	$a_2 > 2$	$a_2 < 3$	$a_2 = 2,5$
3.	$a_3 > 3$	$a_3 < 4$	$a_3 = 3,5$
4.	$a_4 > 4$	$a_4 < 5$	$a_4 = 4,5$
5.	$a_5 > 5$	$a_5 < 6$	$a_5 = 5,5$
6.	$a_6 > 6$	$a_6 < 7$	$a_6 = 6,5$
7.	$a_7 > 7$	$a_7 < 8$	$a_7 = 7,5$
8.	$a_8 > 8$	$a_8 < 9$	$a_8 = 8,5$
9.	$a_9 > 9$	$a_9 < 10$	$a_9 = 9,5$
10.	$a_{10} > 10$	$a_{10} < 1$	$a_{10} = 4$

10.4 Т.к. a_{n+1} – ~~пр~~ корень $P_n(x) \Rightarrow$

$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n =$

$= (x - a_{n+1})\left(x^{2n-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

$\Rightarrow a_n \vdots a_{n+1} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \Rightarrow$ N наберётся.

a_n не обязательно целые.

10.2.

$a+b+c+d = 10^{100}$

$a+b+c = 10^{100} - d \vdots d$

$\Rightarrow 10^{100} \vdots d$ буквы равносильны $\Rightarrow$

аналогично $\Rightarrow$

$10^{100} \vdots a, b, c, d$

~~a+b+c~~ $(b+c+d) \vdots a$ $(a+c+d) \vdots b$

$(a+b+c+d) \vdots a$

$10^{100} \vdots a$

$S_a = \frac{10^{100}}{a}$

$S_b = \frac{10^{100}}{b}$

~~$S_b = \frac{10^{100}}{b}$~~

~~a+~~ $b+c+d = S_a - a$

$a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

$d = 2^{d_1} \cdot 5^{d_2}$

$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 100$

$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 100$

?

$2^{a_1} \cdot 5^{a_2} + 2^{b_1} \cdot 5^{b_2} + 2^{c_1} \cdot 5^{c_2} = \left(10^{100} - 2^{d_1} \cdot 5^{d_2}\right) \vdots 2^{d_1} \cdot 5^{d_2}$

$2^{a_1} \cdot 5^{a_2} + 2^{b_1} \cdot 5^{b_2} + 2^{c_1} \cdot 5^{c_2} = 2^{100-d_1} \cdot 5^{100-d_2} - 1$

См продолжение на стр. 7

10.3

~~2016 чисел!~~

~~Например~~

~~$1+\sqrt{2}$~~	~~$1-\sqrt{2}$~~	~~$1-\sqrt{3}$~~	~~$1+\sqrt{3}$~~	~~...~~	~~$1+\sqrt{k}$~~	~~$1-\sqrt{k}$~~	~~1~~	~~2~~	~~3~~
~~$1-\sqrt{2}$~~	~~$1+\sqrt{2}$~~	~~$1+\sqrt{3}$~~	~~$1-\sqrt{3}$~~		~~$1-\sqrt{k}$~~	~~$1+\sqrt{k}$~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

~~$k \neq x^2$~~

~~пусть~~

2018 чисел!

2014 чисел разобьем на пары:

$a_1 + a_2 = (10^{100} - \sqrt{2}) + (10^{100} + \sqrt{2}) = 2\cdot 10^{100}$

$a_3 + a_4 = (10^{101} - \sqrt{2}) + (10^{101} + \sqrt{2}) = 2\cdot 10^{101}$

...

$a_{2013} + a_{2014} = (10^{(100+1006)} - \sqrt{2}) + (10^{(100+1006)} + \sqrt{2}) = 2\cdot 10^{100+1006}$

т.е. на пары чисел $x-\sqrt{2}$ и $x+\sqrt{2}$, где $x \in R$ и $x_{k+1} = x_k \cdot 10$

Еще 4 числа представим как:

$a_{2015} = 1+\sqrt{2}$

$a_{2016} = 2-\sqrt{2}$

$a_{2017} = 2+\sqrt{2}$

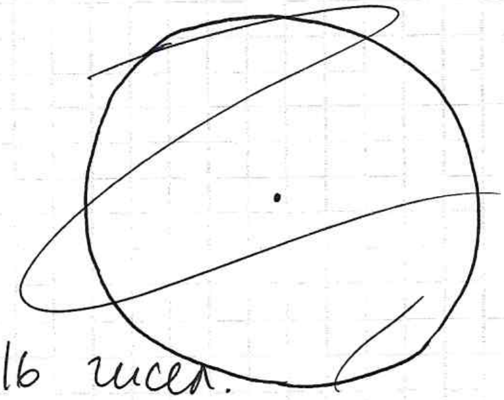
$a_{2018} = 1-\sqrt{2}$

$a_{2019} = 3+\sqrt{2}$

и оставляем a_{2019}. $\Rightarrow$ составим из этих чисел табл

a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{2013}	a_{2014}	$1+\sqrt{2}$ (a_{2015})	$2-\sqrt{2}$ (a_{2016})	$2+\sqrt{2}$ (a_{2017})
a_2	a_1	a_4	a_3		a_{2014}	a_{2013}	$2-\sqrt{2}$ (a_{2016})	$2+\sqrt{2}$ (a_{2017})	$1-\sqrt{2}$ (a_{2018})

10.3



10.3

Ответ: 2016 чисел.

$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	...	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$	1	2	3
$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	...	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$	3	1	2

Пусть можно больше =>

если n – нечетно =>

т.к числа вверху и внизу одинаковые, то разобьем на циклы вида

$a_1 + a_2 = r_1$

$a_2 + a_3 = r_2$

...

$a_k + a_1 = r_k$

тогда найдется цикл нечетной длины ($k \not\vdots 2$)

тогда:

$2(a_1 + \dots + a_k) = R$

$a_1 + \dots + a_k = R'$ => вычтем $(a_1+a_2); (a_3+a_4) \dots$

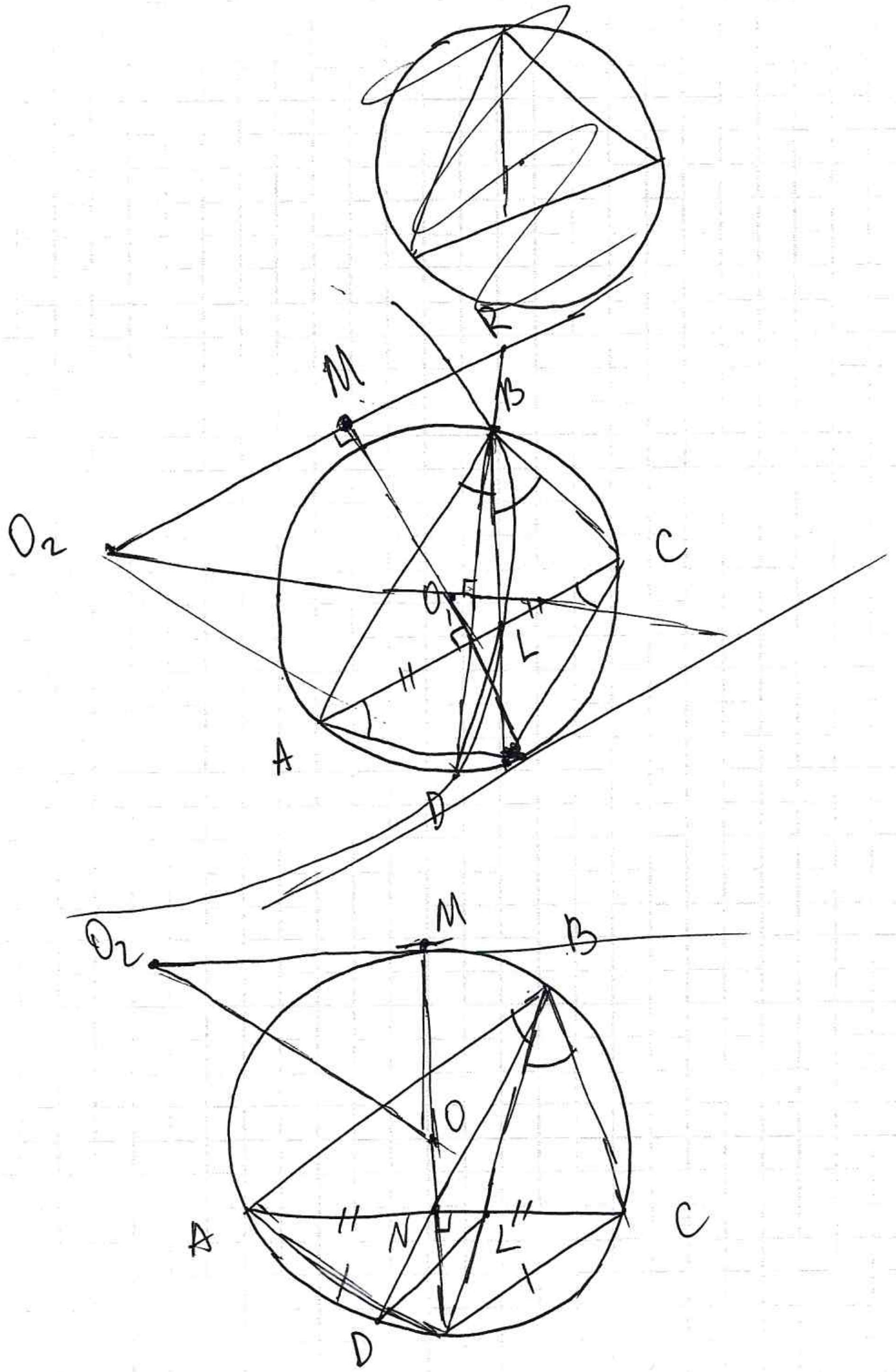
=> $a_1 + a_2 + \dots a_k - (a_1+a_2) - \dots - (a_{k-2}+a_{k-1}) = a_k = R'$ =>

a_k – рациональное => $a_{k-1} = r_k - a_k = r'_k$ =>

a_{k-1} – рац => таким образом окажется что все $a_1 \dots a_k$ – рацион. => цикл нечетной длины возможен только на рац. числах. => $n \vdots 2$

тогда пусть $n = 2018$ => разобьем на циклы четной длины => останется 1 число в цикл с собой, но в столбце числа разные по усл => $n \neq 2018$ => $n = 2016$

10.5



$$\begin{cases} \dfrac{2^{a_1}\cdot 5^{a_1}+2^{b_1}\cdot 5^{b_2}+2^{c_1}\cdot 5^{c_2}}{\text{: } 2^{d_1}\cdot 5^{d_2}} = 2^{100-d_1}\cdot 5^{100-d_2}-1 \\ \dfrac{2^{b_1}\cdot 5^{b_2}+2^{c_1}\cdot 5^{c_2}+2^{d_1}\cdot 5^{d_2}}{\text{и } \text{: } 2^{a_1}\cdot 5^{a_2}} = 2^{100-a_1}\cdot 5^{100-a_2}-1 \end{cases}$$

пусть $a_1 \le b_1 \le c_1 \le d_1$ и $a_2 \le b_2 \le c_2 \le d_2$

$$\Rightarrow 2^{a_1-d_1}\cdot 5^{a_2-d_2}+2^{b_1-d_1}\cdot 5^{b_2-d_2}+2^{c_1-d_1}\cdot 5^{c_2-d_2} = 2^{100-d_1}\cdot 5^{100-d_2}-1$$

Заметим, что правая часть ⋮2 и ⋮5 ⇒

⇒ ~~левая тоже ⇒~~

~~Чтобы получить остаток ~~4 слева надо~~:~~

~~$1+1+2$~~

~~$0+0+4$~~

	0	1	2	3	4
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~
~~2~~	~~0~~	~~2~~	~~4~~	~~1~~	~~3~~
~~4~~					

~~⇒ не может быть, что~~

~~$\begin{cases} a_2-d_2>0 \\ b_2-d_2>0 \\ c_2-d_2>0 \end{cases}$ ⇒ хотя бы одно из a_2, b_2, c_2 ⇒ т.к c_2 – max из ~~равно d_1 ⇒ т.к~~ ~~буквы равноценны~~, то пусть c_2 ⇒~~

~~$$2^{a_1-d_1}\cdot 5^{a_2-d_2}+2^{b_1-d_1}\cdot 5^{b_2-d_2}+2^{c_1-d_1}\cdot 1 = 2^{100-d_1}\cdot 5^{100-d_2}-1$$~~

~~⇒ т.к $a_2 \le b_2 \le c_2 \le d_2$ ⇒~~

~~$\begin{cases} a_2-d_2\le 0 \\ b_2-d_2\le 0 \\ c_2-d_2\le 0 \end{cases}$ ⇒ т.к нод$(2^k, 5^m)=1$ ⇒ $2^{a_1-d_1}\cdot 5^{a_2-d_2}$, где $a_2<d_2$ будет не целым ⇒ $a_2=d_2$ ⇒~~

~~⇒ $b_2=d_2$ ⇒ $c_2=d_2$ ⇒~~

~~остается $2^{a_1-d_1}+2^{b_1-d_1}+2^{c_1-d_1} = 2^{100-d_1}\cdot 5^{100-d_2}-1$~~

1-10-08

7

? $(a+b+c)\vdots d \Rightarrow$
$(a+b+c+d)\vdots d \Rightarrow$
$10^{100}\vdots d \Rightarrow$
аналогично $10^{100}\vdots a, b, c, d \Rightarrow$
a, b, c, d можно представить как $2^m\cdot 5^n$

пусть $a = 2^{a_1}\cdot 5^{a_2}$
$b = 2^{b_1}\cdot 5^{b_2}$
$c = 2^{c_1}\cdot 5^{c_2}$
$d = 2^{d_1}\cdot 5^{d_2}$

(буквы равносильны)

$\Rightarrow$ пусть $a_2 \le b_2 \le c_2 \le d_2 \Rightarrow$
посмотрим на
$a+b+c = 10^{100} - d \,\vdots\, d \Rightarrow$
$2^{a_1}\cdot 5^{a_2} + 2^{b_1}\cdot 5^{b_2} + 2^{c_1}\cdot 5^{c_2} = 2^{100}\cdot 5^{100} - 2^{d_1}\cdot 5^{d_2}$
$2^{a_1-d_1}\cdot 5^{a_2-d_2} + 2^{b_1-d_1}\cdot 5^{b_2-d_2} + 2^{c_1-d_1}\cdot 5^{c_2-d_2} = 2^{100-d_1}\cdot 5^{100-d_2} - 1$

т.к d_2 - max из степеней 5 $\Rightarrow$

$\begin{cases} a_1-d_1\le 0 \\ b_1-d_1\le 0 \\ c_1-d_1\le 0\end{cases}$ т.к $\text{нод}(2^k, 5^m)=1 \Rightarrow$ $2^k\cdot 5^m$, где $m<0$ будет не целым ?
$\Rightarrow$ слева будет не целое, а справа целое. $\Rightarrow$

Напр., $\frac{2}{5}+\frac{2^3}{5} = \frac{2}{5}+\frac{8}{5} = 2$ целое!

$\begin{cases} a_1 = d_1 \\ b_1 = d_1 \\ c_1 = d_1\end{cases}$

Аналогично с 2. пусть ~~не умаляя~~
$d_1 \le c_1 \le b_1 \le a_1 \Rightarrow$ в a_1 max степень вхождения $\Rightarrow$
$2^{d_1}\cdot 5^{d_2} + 2^{c_1}\cdot 5^{c_2} + 2^{b_1}\cdot 5^{b_2} = 10^{100} - 2^{a_1}\cdot 5^{a_2} \;\vdots\; 2^{a_1}\cdot 5^{a_2}$
$2^{d_1-a_1}\cdot 5^{d_2-a_2} + 2^{c_1-a_1}\cdot 5^{c_2-a_2} + 2^{b_1-a_1}\cdot 5^{b_2-a_2} = 2^{100-a_1}\cdot 5^{100-a_2} - 1$
$\Rightarrow$ т.к a_1 - max $\Rightarrow$ $\begin{cases} d_1-a_1\le 0 \\ c_1-a_1\le 0 \\ b_1-a_1\le 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ т.к $\text{нод}(2^k; 5^m)=1 \Rightarrow$ $2^k\cdot 5^m$, где $k<0$ будет не целым

$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = a_1 \\ b_1 = a_1 \\ c_1 = a_1\end{cases} \Rightarrow$ $a=b=c=d = 2^{a_1}\cdot 5^{d_2} \Rightarrow$
$a=b=c=d = \frac{10^{100}}{4} = \underline{\underline{25\cdot 10^{98}}}$

$\Rightarrow$ это ромб.

7

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 2-10-31

1	2	3	4	5	Σ

6	7	8	9	10	Σ
$+_{АВ}$ $7_Т$	$+_{ВМ}$ $7_{АВ}$	~~$+_{п.о.}$~~ ~~$\emptyset_{п.о.}$~~ $7_{п.о.}$ (апелляция)	$\emptyset_{ИМ}$ OK	$7_{ВМ}$ 1	15 → 22

10.7.

посмотрим на разность x_{n+1} и x_n

если ~~x_{n+1}~~ $x_n - x_{n+1} > 0 \Rightarrow$ посл. убывающая

и наоборот.

$$x_n - x_{n+1} = 2^n\cdot\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right) - 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) =$$

(разложим как разность квадратов)

$$= 2^n\left(\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) - 2\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)\right) =$$

$$= 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} - 2\right) \quad (*)$$

1) $2^n > 0$

2) $\sqrt[2^{n+1}]{b} > \sqrt[2^{n+1}]{a} \Rightarrow \sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a} > 0$
(т.к $b > a$)

3) $\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 2\sqrt[2^{n+1}]{a} > 2\sqrt[2^{n+1}]{1} = 2 \Rightarrow$

$\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 2 \Rightarrow \sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} - 2 > 0 \Rightarrow$

$(*)$ больше $0 \Rightarrow$ разность между двумя посл. членами > 0 ($x_n - x_{n+1} > 0$) $\Rightarrow$
посл. убывающая

10.6

Пусть есть 4 числа $a, a+1, a+2, a+3$

тогда возможные ~~сум~~ суммы:

1. $a+(a+1)+(a+2) = 3a+3$
2. $a+(a+1)+(a+3) = 3a+4$
3. $a+(a+2)+(a+3) = 3a+5$
4. $(a+1)+(a+2)+(a+3) = 3a+6$

Посмотрим на суммы 1 и 4

1. $3a+3 = 3(a+1)$
4. $3\cancel{x}a+6 = 3(a+2)$

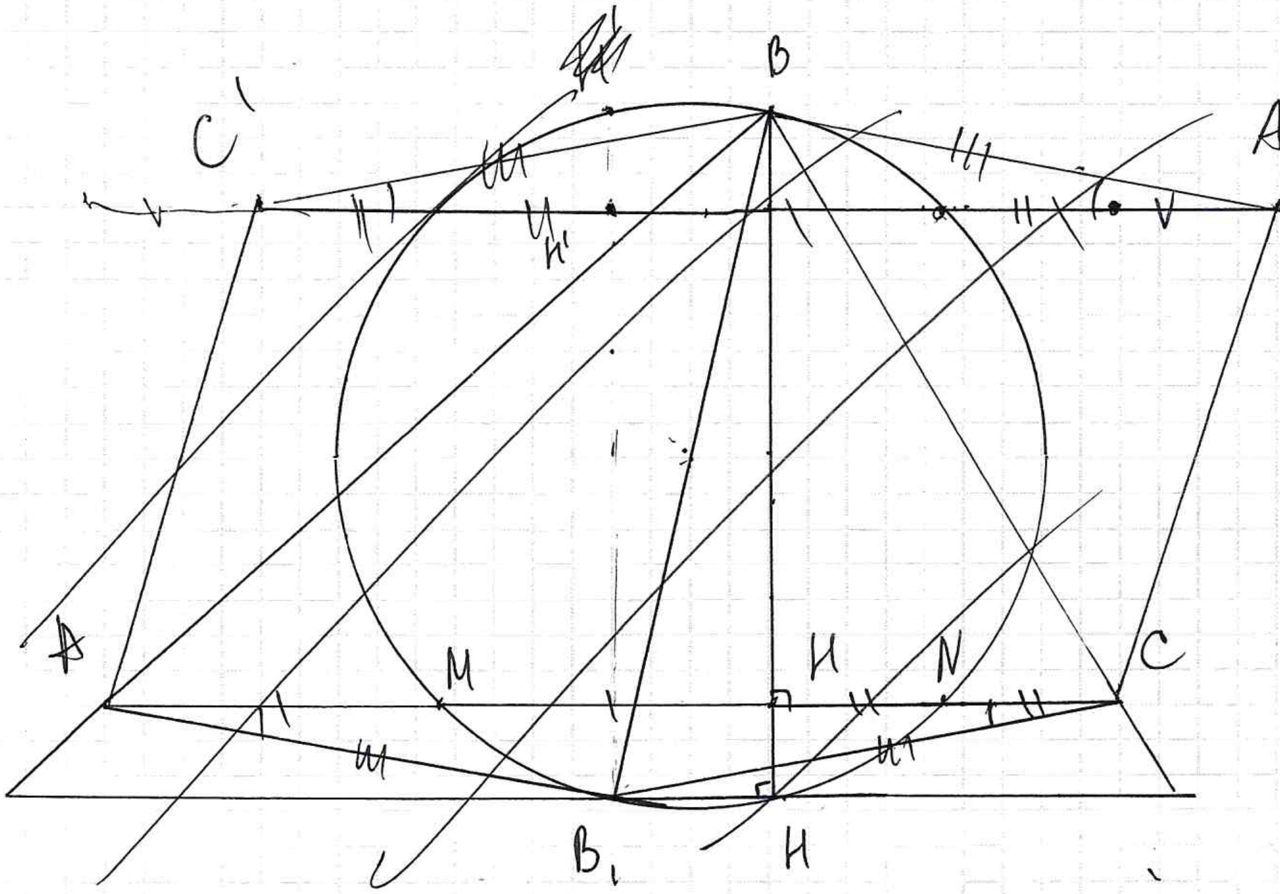
т.к ~~эту~~ сумму на разложить на 3 разных натур. числа, число 3 уже есть, тогда посмотрим на $(a+1)$ и $(a+2)$ Допустим, что мы не можем их разложить, тогда $(a+1)$ и $(a+2)$ – оба простые, но одно ~~из~~ чисел $\vdots 2$ => неверно. Посмотрим на то число, которое $\vdots 2$, могут возникнуть проблемы если $x:2$ будет 2 или 3 и тогда 3^x разных множителей не будет, но по усл числа больше 100 =>

$\underline{x > 100}$ x - сумма => $x > 300$

$\frac{x}{\cancel{6}2\cdot 3} > \frac{100}{6}$ => третий отличной от 2 и 3 множ. будет $\underline{>16}$ =>

$\frac{x}{6} > 16\frac{4}{6} > 16$ ~~[illegible]~~ Для такой суммы надо брать числа 1, 2, 3, если $2^{ое}$ не простое или иначе 2, 3, 4

то есть четное?


B
C'
A'
H'
A
M
H
N
C
B₁
H

10.10

~~Найдем~~

Пусть не для всех k это выполняется, тогда найдем наименьшее k, для которого это неверно.

Очевидные факты:

+ 1. $\text{нод}(k; k-1) = 1$ +

+ 2. $\text{нод}(k; (k-1)\cdot n) \leq n$ и яв. делителем n => есть какое-то r, что $(r\cdot n) \vdots k$, где $r \in [0; k$

3. Среди чисел

Что здесь написано?

$1\cdot(k-1)\cdot n$; $2(k-1)\cdot n$; $(k-1)\cdot n \cdot 3$ ...

$(k-1)\cdot n \cdot (k$

встречаются все остатки по mod k при $\text{нод}(n; k) = 1$ или все ост. по mod k : n при ...

Допустим не все, тогда т.к. их ровно k при ... есть 2 таких обст. : $(k-1)\cdot n \cdot m_1$ и $(k-1)\cdot n \cdot m_2$

~~что при нод(n; k) > 1 по ...~~ =>

$(k-1)\cdot n \cdot m_1 \equiv (k-1)\cdot n \cdot m_2$

$m_1 \equiv m_2$

но $0 \leq m \leq k-1$ (все ост. по k по 1 разу)

Тогда.

найдем число ! $(k-1)$ в нашей послед. оно есть т.к. k — первое не встретившееся.

тогда пусть номер этого числа X.

тогда посмотрим на числа

X	$\ldots X^2-1$	X^2	X^2+1	$X^2+2 \ldots$	$(X+1)^2-1$
$(k-1)\cdot n$	y	$y+(k-1)\cdot n$	$y+(k-1)\cdot 2n$	$y+3\cdot n\cdot(k-1)$	$y+2x\cdot n\cdot(k-1)$

тогда среди чисел $y+(k-1)\cdot n$ до $y+2x\cdot n(k-1)$ встретятся все остатки по mod. k.

~~Уточнение~~:

~~Для~~ Число $(k-1)\cdot n$ мы выбираем max n у всех которые встречаются.

Докажем еще одно утверждение:

В чём состоит утверждение?

~~теперь~~ докажем по индукции

пусть ~~k~~ есть число: k в промежутке синдексом

от $(y-1)^2$ до y^2-1

Для любого в промежутке от $a_{(y-1)^2}$ до a_{y^2-1} есть делящееся на y?

база: $y = 3 \Rightarrow a_6 \vdots 3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
1	2	3	4	~~7~~ 6	9	11	13	16

переход | тогда возьмем отрезок длина

~~y~~ y^2 до $(y+1)^2-1$ в нем есть $2y+1$ чисел

т.к $y \vdots k \Rightarrow$ ~~k~~ $y \geq k \Rightarrow 2k+2 > k$.

$\Rightarrow$ т.к по факту 1 $mod(k;k+1)=1 \Rightarrow$

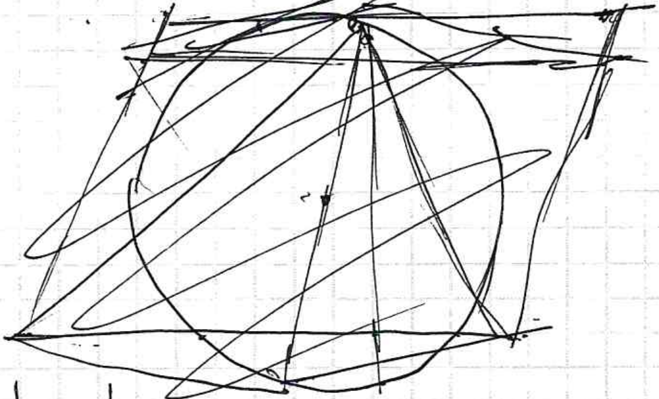
i	y^2-1	y^2	y^2+1	...	$(y+1)^2-1$	~~$(y+1)^2$~~
y	z	$z+y$	$z+2y$	...	$z+y^2$ ~~$(y-1)$~~	?

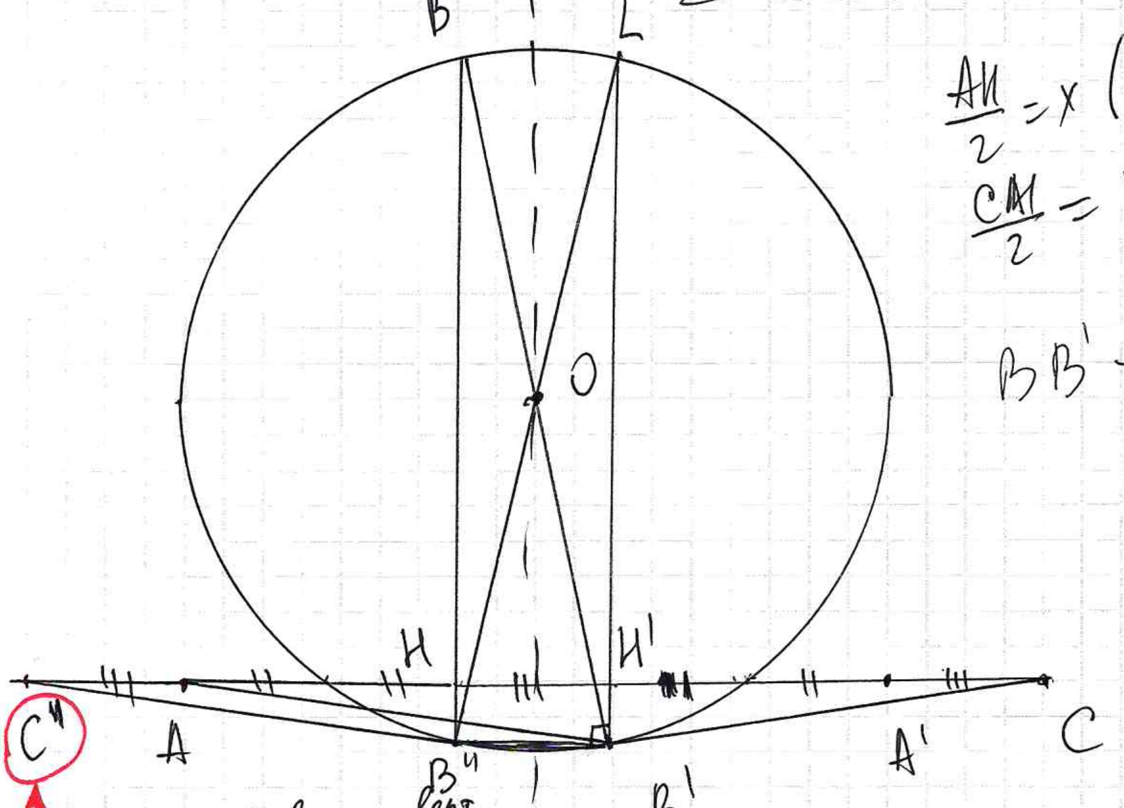
$\Rightarrow$ тут есть числа $z; z+y; z+2y \dots; z+y^2$

т.к по фактам 2 и 3 среди этих чисел встречаются все остатки по mod $(k+1)$ и явл. делит. n. $\Rightarrow$

найдется число $\vdots (k+1) \Rightarrow$ доказано для всех $k \Rightarrow$ встретятся все числа.

10.8





$\frac{AH}{2} = x$ (II)

$\frac{CH}{2} = y$ (II+III)

$y - x = z$ (III)

$BB' \to B''L$

проведем ось окр. через центр O,
отразим отн. верт. оси. тогда $A \to A'$; $C \to C'$
$B' \to B''$; $B''B' = HH'$ т.к $BLB'B''$ - прямоуг-к
$H \to H'$ в силу симметрии (углы опир на диам).
и равно HH' т.к $HH' \parallel AC$ => перпенд. оси (ось явл ~~серпером~~ серединным перпендикуляром к AC и => проходит через центр O)
=> $C'A = CH - AH = 2\cdot(II) + (III) - 2\cdot(II) = (III) = HH' = B''B'$

почему $HH' = C'A$?

$C' \equiv C''$?

=> В · $C''AB'B''$ − $C'A$ и $B''B'$ равны и параллельн (перпенд. вертик. оси) => $C'AB'B''$ − параллелограм => $C'B'' = AB'$
а $C''B''$ в силу симметрии равно CB' => $CB' = AB'$