Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс

Шифр 1-10-15

10.1

Предположим, что все 10 человек - рыцари, тогда
x_i - число i-того рыцаря

$$+\begin{cases} b_1 < x_1 < a_1 \\ b_2 < x_2 < a_2 \\ \ldots \\ b_{10} < x_{10} < a_{10} \end{cases}, \text{ где } b_i, a_i \in \{1, 2, 3 \ldots 10\}$$

$$b_1 + b_2 \ldots + b_{10} < x_1 + x_2 \ldots + x_{10} < a_1 + a_2 \ldots + a_{10}$$

Так как высказывания не повторялись, то

$$b_1 + b_2 \ldots + b_{10} = a_1 + b_2 + \ldots + a_{10} = 55$$

$$55 < x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} < 55 \text{ — противоречие}$$

$\Downarrow$

Кол-во рыцарей меньше 10.

$P = 9$ - пример.

Высказывания $1 < 1{,}5$; $2 < 2{,}5$; $3 < 3{,}5$ ... $9 < 9{,}5$; $10 < 5$
x_1 ; x_2 ; x_3 ... x_9 ; лжец.

$1{,}5 < 2$, $2{,}5 < 3$; $3{,}5 < 4$ ... $9{,}5 < 10$; $5 < 1$
x_1 , x_2 , x_3 ... x_9 , лжец

Ответ: 9 рыцарей

1	2	3	4	5	Σ
+ т	0 V мм	∓ АБ	0 Вм	− п.о.	9
7 А.В		2 мм	0	0 К	12
		5 АБ			

10.3

a_i ~~…~~, где $i \le 2019$, $i \in N$ – номер в строчке

число в строчке

a_1	a_2	...	a_{2019}
a_m	a_n		a_g

По условию задачи

(1) $$\begin{cases} a_1 + a_n = r_1, & r_i \in R \\ a_2 + a_m = r_2, & \\ \dots & \\ a_{2019} + a_g = r_{2019} \end{cases}$$

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}) = r_1 + r_2 + \dots + r_{2019} \in R$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}) \in R$$

Докажем, что мы можем переставить числа так:

a_1	a_n
a_n	a_1

~~не нарушая правил~~. (переставим по одной $\begin{matrix} \text{1 строчка} & \text{2 строчка} \end{matrix}$ $a_n + a_m = R$, $a_m + a_n = R$)

I $$\begin{cases} a_1 + a_n = r_1 \\ a_n + a_i = r_2 \\ a_j + a_1 = r_m \end{cases}$$ – часть таблицы

$$a_1 = r_1 - a_n$$

$$+\begin{cases} a_j + r_1 - a_n = r_m \\ a_n + a_i = r_2 \end{cases}$$

ок $$a_j + r_1 + a_i = r_m + r_2$$

(2) $$\begin{cases} a_j + a_i = r_m + r_2 - r_1 \in R \\ a_1 + a_n \in R \end{cases}$$

II (1) $$\begin{cases} a_1 + a_n = r_1 \\ a_n + a_1 = r_1 \end{cases}$$ часть таблицы

То есть, мы можем систему (1) преобразовать в виде:

$$\begin{cases} a_i + a_n = r_1 \\ a_n + a_i = r_1 \\ \dots \\ a_i + a_j = r_m \\ a_j + a_i = r_m \\ \dots \\ a_g + a_g = r \end{cases}$$

$2a_g = r$

$a_g = \in R$ Q?

$\Downarrow$

Если у нас I случай, то 2 равенства выделяем

$$\begin{cases} a_i + a_n = r_i \\ a_n + a_i = r_i \end{cases}$$

а третье оставляем в виде

ok $a_i + a_j = r_f$

Если II случай, то мы выделяем

пары
$$\begin{cases} a_i + a_n = r_i \\ a_n + a_i = r_i \end{cases}$$

Таким способом мы преобразовываем систему и 2019 => остаётся одна, такая, что

Хотя бы одно число

ok из первой строки рациональное.

Так как у этого числа была пара

$a_g + a_t = r_t$, где $a_t \neq a_g$, то есть $a_t \in R$ Q

У числа a_t могла быть пара или

I $a_t + a_g = r_e$

II $a_t + a_m = r_l$

I $a_t + a_g = r_t$, то из 2017 оставшихся пар, мы можем выделить ещё одно рациональное.

II $a_t + a_m = r_l \Rightarrow a_m \in R$

$\Downarrow$

Как минимум 3 рациональных числа в первой строке.

Пример:

0	1	2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	...	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$
1	2	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	...	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$

+

Ответ: 2016 рациональных чисел.

10.5

Дано:

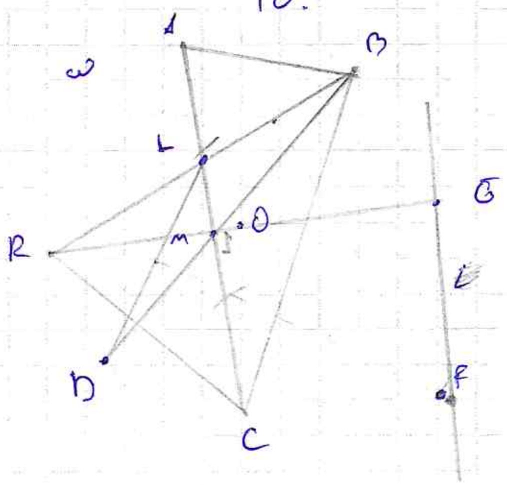
BL - биссектриса

BM - медиана

O - центр окружн. ω

Доказать:

l касательная ω



Решение:

Проведём серединный перпендикуляр MO к стороне AC, тогда он проходит через центр описанной окружности ω по ~~определению~~ св-ву опис. окружн.

$MO \perp AC$ по определению перпендикуляра.

~~Пусть~~ G - пересечение MO с окружностью ω

Проведём прямую GR, где R центр окружности DLB

$GF \perp OG$ - касательная — это мы как раз и пытаемся доказать.

$MG \perp AC$

$\Downarrow$

$GF \parallel AC$ по признаку.

Из точки можно провести только одну прямую параллельную данной

$\Downarrow$

$GF = l$ ⇒ касательная

Доказано: ~~GF~~ l - касательная к окружности ω

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 2-10-08

6	7	8	9	10	Σ
$+_{АВ}$	$+_{ВМ}$	$+_{п.о.}$	0	$\mp_{ВМ}$?	
$7_Т$	$7_{АВ}$	$7_{АБ}$	$\frac{-0}{ли}$	1	22

№ 6

Представим 4 последов. натур. числа >100 в виде:

$101+x$, $102+x$, $103+x$, $104+x$ - четыре последоват. нат. числа

где $x \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$

Тогда сумма I + II + III и II + III + IV:

(1) $101+x+102+x+103+x = 306+3x = 3(x+102)$ $\vdots 3$

(2) $102+x+103+x+104+x = 309+3x = 3\cdot(x+103)$ $\vdots 3$

Так как $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$, то

$\left[\begin{array}{l} x = 2k+1 \\ x = 2k \end{array}\right.$, где $k \geq 0$ $k \in \mathbb{Z}$

Если x - нечётное, то есть $x = 2k+1$

(1) $3\cdot(2k+1+102) = 3\cdot(2k+103)$

(2) $3\cdot(2k+1+103) = 3\cdot2\cdot(k+52)$

То сумма (2) будет делится на 3, 2 и на число $k+52$,

где $k \geq 0 \Rightarrow k+52 \neq 3$, $k+52 \neq 2$, $k+52 > 1$

Если x - чётное, $x = 2k$

(1) $3\cdot(2k+102) = 3\cdot2(k+51)$

(2) $3(2k+103)$

То сумма (1) будет делится на 3, 2 и на число $k+51$,

где $k \geq 0 \Rightarrow k+51 \neq 3$, $k+51 \neq 2$ $k+51 > 1$

Доказано.

№7

Метод математической индукции:

База:

$n=1$, $n=2$

$x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}) = 2^n \cdot ((\sqrt[2^{n+1}]{b})^2 - (\sqrt[2^{n+1}]{a})^2) = 2^n \cdot (\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}) \cdot (\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a})$

$x_{n+1} = 2^{n+1} \cdot (\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}) = 2^n \cdot (\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}) \cdot 2$

$b > a > 1 \Rightarrow$

$\Downarrow$

$\sqrt[2^{n+1}]{b} > \sqrt[2^{n+1}]{a} > \sqrt[2^{n+1}]{1}$ $\quad f(x) = \sqrt[2^n]{x}$ – возрастающая функция на $x \geq 1$ где $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[2^{n+1}]{b} > 1$

$+$

$\sqrt[2^{n+1}]{a} > 1$

$\sqrt[2^{n+1}]{a} + \sqrt[2^{n+1}]{b} > 2$ $\quad |\cdot 2^n \cdot (\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a})$ $\quad (\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}) > 0$ т.к. $\sqrt[4]{b} > \sqrt[4]{a} > 1$

$2^n(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a})(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}) > 2^{n+1} \cdot (\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a})$

$x_n > x_{n+1}$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

последовательность $x_1, x_2, x_3 \ldots$ убывает

10.10

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Пусть $t = [\sqrt{n}]$, $\Rightarrow t \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left.\begin{aligned} a_{t^2+1} &= a_{t^2} + a_t \\ a_{t^2+2} &= a_{t^2+1} + a_t \\ &\ldots \\ a_{(t+1)^2} &= a_{(t+1)^2-1} + a_t \end{aligned}\right\}$$

$a_{(t+1)^2+1} = a_{(t+1)^2} + a_{t+1}$

$((t^2+1)+1 - (t^2+1) = t^2+2t+1 - t^2 = 2t+1$ чисел вида:

$a_{t^2+1+i} = a_{t^2+i} + a_t$, где $0 \leq i \leq 2t$, $i \in \mathbb{Z}$

Пусть $f = t^2+i$, тогда

$a_{f+1} = a_f + a_t$, где $t^2 \leq f \leq t^2+2t$

Пусть мы можем найти последовательность: когда

$a_t + a_{t^2}$, $a_{t^2} + 2a_t$, $a_{t^2} + 3a_t \ldots a_{t^2} + 2ta_t$

Рассмотрим эту последовательность по модулю k.

I $a_l \equiv 0 \mod k$

$\Downarrow$

a_l - нужный член последовательности

II $a_l \not\equiv 0 \mod k$

Возьмём такое $l \geq \frac{k}{2}$

$a_{l^2} + a_l$, $a_{l^2} + 2a_l$, ... $a_{l^2} + ka_l$ ✓

Множество остатков по модулю k Вообще говоря, нет

$a_{l^2} + a_l$, $a_{l^2} + 2a_l$ ... $a_{l^2} + ka_l$ - имеет все возможные остатки

Предположим это не так, тогда 2 числа из последовательности имеют одинаковые остатки

$a_{l^2} + na_l \equiv m \cdot a_l + a_{l^2} \mod k$, где $n \neq m$, $1 \leq n, m \leq k$, $m > n$

$a_{l^2} + ma_l - (a_{l^2} + na_l) \vdots k$ $\quad ma_l - na_l \vdots k$

$a_l(m-n) \vdots k$, но

$a_l \not\vdots k$

$m > n \Rightarrow \begin{cases} m - n > 0 \\ m - n < k \end{cases}$ так как $n, m \leq k$, $n \neq m$

$\Downarrow$

$a_l \cdot (m-n) \not\vdots k$ - противоречие

$\Downarrow$

$a_{l^2} + a_l$, ... $a_{l^2} + ka_l$ - имеют все остатки по модулю k. Почему?

$\Downarrow$

в этой последовательности найдётся число, которое делится на k, так как эта последовательность - часть последовательности $a_1; a_2, a_3$...

$\Downarrow$

В последовательности a_1, a_2, a_3 ... всегда найдётся число $\vdots k$

10.8

Дано:

Ω

BH - высота $\triangle ABC$

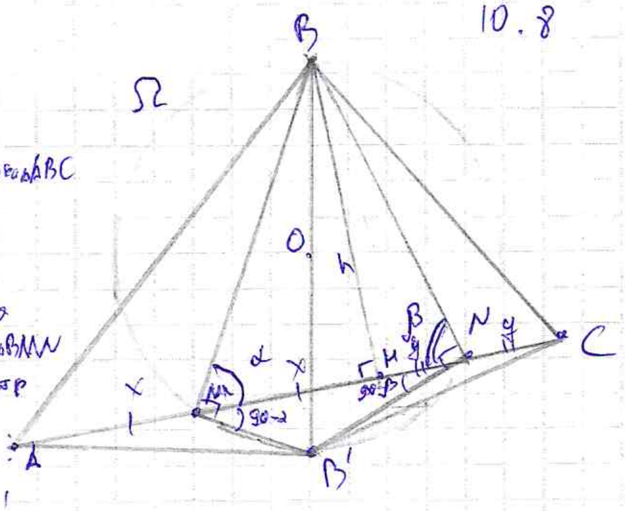
$AM = MH$

$HN = NC$

Ω - описанная окружность $\triangle BMN$

BB' - диаметр

Доказать: $AB' = CB'$



Решение:

Обозначим величины сторон (углы)

$MH = x$ $\quad \angle BMH = \alpha$

$NH = y$ $\quad \angle BNH = \beta$

$HB = h$

ок

Тогда:

$AM = MH = x$

$HN = NC = y$ ок

$\sin\alpha = \frac{BH}{BM}$ $\quad BM^2 = h^2 + x^2$

$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$ $\quad BN^2 = h^2 + y^2$ } по теореме Пифагора

ок

По следствию из теоремы синусов:

$\cancel{\sin\alpha}\ \frac{BN}{\sin\alpha} = 2R = BB'$ - диаметр

$BB' = \frac{\sqrt{h^2+y^2}}{\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}} = \frac{\sqrt{(h^2+y^2)(h^2+x^2)}}{h}$ ок

$\angle BMB' = \angle BNB' = 90^\circ$ - угол опирается на диаметр ок

$B'M^2 = BB'^2 - BM^2 = \frac{(h^2+y^2)(h^2+x^2)}{h^2} - (h^2+x^2) = \frac{y^2(h^2+x^2)}{h^2}$

$B'N^2 = BB' - BN^2 = \frac{(h^2+y^2)(h^2+x^2)}{h^2} - (h^2+y^2) = \frac{x^2(h^2+y^2)}{h^2}$

} по теореме Пифагора. ок.

$\cos \angle B'MC = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$

$\cos \angle B'NA = \cos(90-\beta) = \sin\beta = \frac{h}{\sqrt{h^2+y^2}}$

По теореме косинусов:

$AB'^2 = AN^2 + B'N^2 - 2AN \cdot B'N \cdot \cos(90-\beta) = (2x+y)^2 + \frac{x^2(h^2+y^2)}{h^2} - 2(2x+y)\frac{x\sqrt{h^2+y^2}}{h} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+y^2}} =$

$= (2x+y)^2 + x^2 + \frac{x^2y^2}{h^2} - 2x(2x+y) = y(2x+y) + x^2 + \frac{x^2y^2}{h^2} = x^2 + y^2 + 2xy + \frac{x^2y^2}{h^2}$

$CB'^2 = MC^2 + B'M^2 - 2B'M \cdot MC \cdot \cos(90-\alpha) = (2y+x)^2 + \frac{y^2(h^2+x^2)}{h^2} - 2(2y+x) \cdot y\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{h} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}} =$

$= (2y+x)^2 + y^2 + \frac{y^2x^2}{h^2} - 2y(2y+x) = x(2y+x) + y^2 + \frac{y^2x^2}{h^2} = x^2 + y^2 + 2xy + \frac{x^2y^2}{h^2}$ ок,

$AB'^2 = CB'^2$

$\Downarrow$

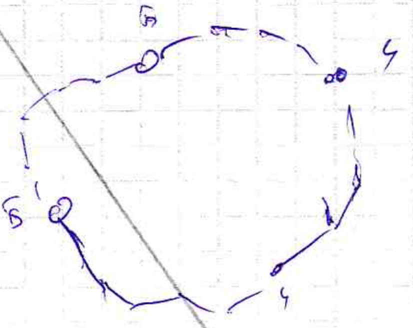
$AB' = CB'$

Доказано: $AB' = CB'$ (+)

10.9

~~Если раскраска хорошая, то идя~~

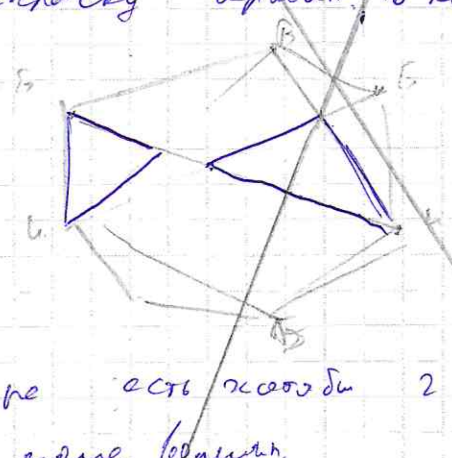
Если раскраска хорошая, то идя по вершинам по кругу, мы обязательно встретим:



2 белых точки, а потом 2 чёрных точки, между которыми могут быть точки или нет.

Предположим, что это не так, тогда рассмотрим хорошую раскраску вершин, в которой мы не можем выбрать 4 точки идущих в таком порядке

Б Б, Ч, Ч



Тогда в фигуре есть хотя бы 2 треугольника, не имеющих общих точек, кроме вершин.

~~Также если 4 точки в~~

Тогда кол-во Б ≥ 2, кол-во Ч ≥ 2, тогда

если всего n точек, то единственное построение и

$\Downarrow$

Есть в фигуре хотя бы 2 непересекающиеся разноцветные диагонали.

~~Предположим, что нет , тогда.~~

~~Если один точек одинакого цвета =1~~