Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

10 класс

Шифр 1-10-22

1	2	3	4	5	Σ
+ 7 АВ	∓ 5 к	+. 6 мт	+ 7	− 0 к	25

Задача 1.

Заметим, что рыцарей не больше 10, т.к. людей всего 10.

Докажем, что 10 рыцарей быть не могло. Докажем от противного.
Если было 10 рыцарей, то все высказывания верны. Значит есть загаданное число больше 10. Но заметим, что когда они говорили по второму кругу, то оказалось, что все загаданные числа меньше 10 (если все рыцари). Значит кто-то солгал. Противоречие.

Значит рыцарей не больше 9.

Пример на 9 рыцарей:

1-ый: $1 < 1{,}5 < 2$ – рыцарь

2-ой: $2 < 2{,}5 < 3$ – рыцарь

⋮

9-ый: $9 < 9{,}5 < 10$ – рыцарь

10-ый: $10 \not> 5 \not< 1$ – лжец

Ответ: 9 рыцарей.

Задача 2.

Пусть p – периметр четырёхугольника; a, b, c, d – его стороны, т.е.

$$a+b+c+d=p=10^{100}$$

По условию $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, $d \in N$

и

$p-d = a+b+c \,\vdots\, d$ $\quad p \,\vdots\, d$

$p-c = a+b+d \,\vdots\, c$ т.е. $p \,\vdots\, c$

$p-b = a+c+d \,\vdots\, b$ $\quad p \,\vdots\, b$

$p-a = b+c+d \,\vdots\, a$ $\quad p \,\vdots\, a$

Иными словами a, b, c, d - делители $p=10^{100}$

Заметим, что т.к. a, b, c, d - стороны выпуклого четырёхугольника с периметром равным p, то

$a < \frac{p}{2}$ $\quad a < 10^{99.5}$

$b < \frac{p}{2}$ т.е. $b < 10^{99.5}$

$c < \frac{p}{2}$ $\quad c < 10^{99.5}$

$d < \frac{p}{2}$ $\quad d < 10^{99.5}$ $\quad a < \frac{10^{100}}{2}$ $\quad a = \frac{10^{100}}{n}$

Но т.к. a, b, c, d - делители 10^{100}, то

$a \le \frac{10^{100}}{4}$

$b \le \frac{10^{100}}{4}$?

$c \le \frac{10^{100}}{4}$ т.е. $a+b+c+d \le 10^{100}$, но

$d \le \frac{10^{100}}{4}$ $a+b+c+d = 10^{100}$ значит все стороны равны $\frac{10^{100}}{4}$ и равны между собой, т.е. четырёхугольник - ромб. ч.т.д.

Прим.: $\frac{10^{100}}{4}$ - максимальный делитель 10^{100} меньший $\frac{10^{100}}{2}$, т.к. $\frac{10^{100}}{4} > \frac{10^{100}}{5}$

Задача 3.

Заметим, что

$p+p=p$

$p+ир=ир$

$ир+ир$ - может быть равно как рациональному, так и иррациональному.

Т.е. если в каждом из 2019 столбцов сумма рациональна, то в столбце могут стоять либо 2 рациональных, либо 2 иррациональных

Другими словами 2 строка разбивается на 2 группы (как и первая) рациональные числа и иррациональные числа. При чём во 2-ой строке последовательность иррациональных чисел - перестановка последовательности иррациональных чисел 1-ой строки

Очевидно?

Любая перестановка разбивается на циклы „смещений". Докажем, что длина каждого из них - чётна. Докажем от противного. Предположим, что найдётся цикл длина, которого нечётна, т.е.

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{2k+1}$

$a_{2k+1} \quad a_1 \quad \dots \quad a_{2k}$, при чём по условию

$a_1+a_{2k+1} - p$

$a_2+a_1 - p$

$\vdots$

$a_{2k+1}+a_{2k} - p$

, т.е. $2(a_1+a_2+\dots+a_{2k+1}) - p$,

т.е. $a_1+a_2+\dots+a_{2k+1} - p$,

Как?

но т.к. $a_1+a_2+\ldots+a_{2k}$ – p, как сумма рациональных, то a_{2k+1} – рационально, но по предположению оно иррационально. Противоречие.

Значит все циклы иррациональных чисел чётной длины, т.е. иррациональных чисел было чётное число (в 1-ой строке), а рациональных нечётное.

Заметим, что в 1-ой строке не могло быть только 1 рац. число, т.к. по сказанному ранее оно может стоять в столбце только с другим рациональным (не равным ему). Тогда рациональных было хотя бы 3 (в первой строке). Значит

Иррациональных не больше 2016.

Пример на 2016 иррациональных чисел:

1-ая	$1+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	…	$k+(-1)^k\cdot\sqrt{2}$	$k+1+(-1)^{k+1}\sqrt{2}$	$2016+\sqrt{2}$	1	2	3
2-ая	$2+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	…	$(k+1)+(-1)^{k+1}\cdot\sqrt{2}$	$k+(-1)^k\sqrt{2}$ …	$2015-\sqrt{2}$	3	1	2
Σ	3	3	…	$2k+1$	$2k+1$	4031	4	3	5

при $k\in N$, $2k+1\in N$

$k+(-1)^k\cdot\sqrt{2}$ – иррационально, т.к. $\sqrt{2}$ – иррационально

Ответ: 2016 – наибольшее количество ~~чисел~~ иррациональных чисел в 1-ой строке

Задача 4.

Заметим, что $P_n(x)=P_n(-x)$

$P_n(x)=x^{2n}+a_1\cdot x^{2n-2}+a_2\cdot x^{2n-4}+\ldots+a_n=(-1)^{2n}\cdot x^{2n}+a_1\cdot(-1)^{2n-2}\cdot x^{2n-2}+$
$+a_2\cdot(-1)^{2n-4}\cdot x^{2n-4}+\ldots+a_n\cdot(-1)^0=(-x)^{2n}+a_1(-x)^{2n-2}+a_2\cdot(-x)^{2n-4}+\ldots+a_n=$
$=P_n(-x)$

Это значит, что ~~А~~ если $P_n(x)=0$, то $P_n(-x)=0$

т.е. начиная с $n=2019$ $a_n<0$

Прим: $a_n \neq 0$ по условию, тогда

Заметим, что

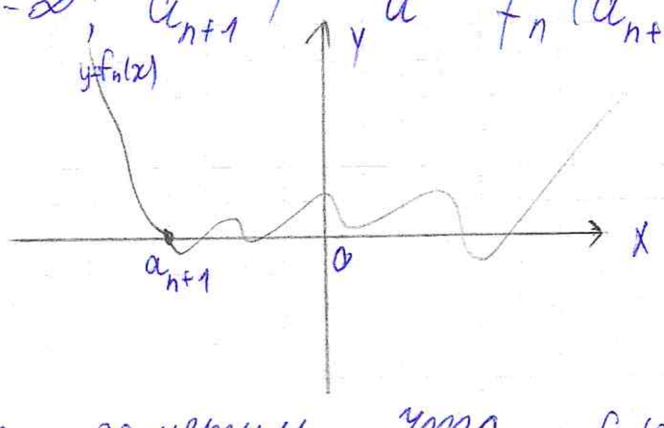
$$P_{n+1}(x) = x^{2n+2} + a_1\cdot x^{2n} + a_2\cdot x^{2n-2} + \ldots + a_n\cdot x^2 + a_{n+1} =$$

$$= (x^{2n} + a_1\cdot x^{2n-2} + a_2\cdot x^{2n-4} + \ldots + a_n)\cdot x^2 + a_{n+1} = P_n(x)\cdot x^2 +$$

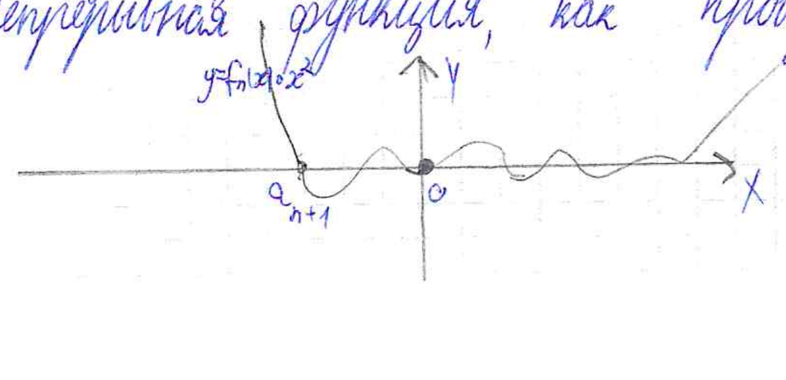
$$+ a_{n+1}$$

Пусть $f_n(x) = P_n(x)$ некая функция, тогда очевидно, что $f_n(x)$ - непрерывна, как сумма непрерывных при конечном n

Т.к. коэффициент при старшей степени равен 1, т.е. больше 0, то $f_n(x)$ - ~~убывает~~ положительна при ~~x~~ $x \in (-\infty; a_{n+1})$ и $f_n(a_{n+1})=0$ при $a_{n+1}<0$



Тогда заметим, что $f_n(x)\cdot x^2$ - также непрерывная функция, как произведение непрерывных



Т.к. $f_n(x)\cdot x^2$ - непрерывна и ~~убывает на ...~~

~~к.т.~~ положительна при $x\in(-\infty;\ a_{n+1})$, т.к. умножение на x^2 - не влияет на знак, а также неограничена сверху, т.к. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{2n+2})=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f_n(x)\cdot x^2\right)=\infty$, то

существует x^*, такое что

$$f_n(x^*)\cdot(x^*)^2=|a_{n+1}|=-a_{n+1},\ \text{т.к. } a_{n+1}<0$$

при $x^*\in(-\infty;\ a_{n+1})$

Тогда при этом x^*

$$P_{n+1}(x^*)=P_n(x^*)\cdot(x^*)^2+a_{n+1}=f_n(x^*)\cdot(x^*)^2+a_{n+1}=$$

$=0$ и $a_{n+2}\le x^*<a_{n+1}$

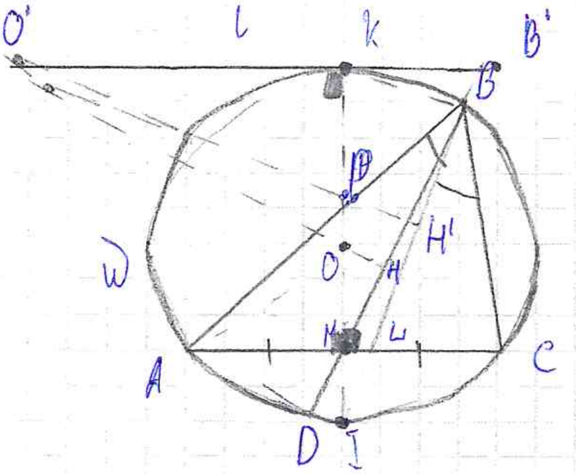
т.е. такое N - существует и

$N=2019$, т.к. $a_{2019}<0$, т.к.

$P_{2018}(x)$ - должен иметь ненулевые корни, а по ранее доказанному среди них будут и отрицательные.

1-10-22

Задача 5.



Переформулируем условие.
Пусть из центра окружности описанной около треугольника ~~BBL~~ BDL, проведена касательная ~~к окружности содержащей B~~

Доказать, что $AC \parallel l$

Пусть K - точка касания,
M - середина AC
I - точка пересечения BL и ω
O - центр окружности описанной около ABC

Тогда $AC \parallel l \Leftrightarrow K, O, M, I$ лежат на одной прямой

т.е. это надо док-ть

O, M, I - лежат на одной прямой т.к. ~~$\angle AOM = \angle MOC$~~ дуги AI и IC равны, ~~$\angle ABI = \angle IBC$~~ следовательно $AI = IC$ тогда $AOCI$ - дельтоид, где M - точка пересечения диагоналей

~~Заметим, что KOM лежат на одной прямой по теореме Менелая для $\triangle O'B'H'$, тогда $AC \parallel l$, т.к.~~

$KM \perp AC$ и $KM \perp l$

Заметим, что K, O, I лежат на одной прямой, потому что ~~...~~ ~~...~~, тогда $\triangle KIB \sim \triangle PIH'$

Почему они подобны? Пока ~~мы~~ знаем, что K, O, M, I - одна прямая это не очев. Это

1-10-22

вероятно, имелись в виду какие-то другие точки.

K, O, H лежат на одной прямой с

AC || l, т.к. KM ⊥ AC и KM ⊥ l

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

10 класс   Шифр 2-10-11

6	7	8	9	10	Σ
$+_{АО}$	$+_{Т}$	$+_{т.о.}$	$\frac{-к}{+_{ММ}}$	$?_{БМ}$ к	
$7_{Т}$	$7_{БМ}$	$7_{АБ}$	3	2	26

Задача 1. (10.6)

Обозначим первое число - x.

Тогда нам даны числа: x, $x+1$, $x+2$, $x+3$

Пусть S_1 - сумма первых трёх чисел, т.е.

$$S_1 = x+(x+1)+(x+2) = 3x+3 = 3(x+1)$$

Пусть S_2 - сумма последних трёх чисел, т.е.

$$S_2 = (x+1)+(x+2)+(x+3) = 3x+6 = 3(x+2)$$

Заметим, что при x - нечётном, $(x+1) = 2\cdot k$, а т.к. по условию $x>100$, то $k \geq 51$, т.е.

$$S_1 = 3(x+1) = 2\cdot 3\cdot k, \text{ где } k\in N \text{ и } k>3$$

При x же чётном $(x+2) = 2\cdot a$, где $a \geq 51$, т.к. $x>100$ тогда

$$S_2 = 3(x+2) = 2\cdot 3\cdot a, \text{ где } a\in N \text{ и } a>3$$

Значит и при чётном, и при нечётном x - необходимые 3 числа можно выбрать. Ч.т.д.

Задача 2. (10.7)

Заметим, что $\sqrt[2^{n+1}]{a} = \sqrt[2^n\cdot 2]{a} = \sqrt{\sqrt[2^n]{a}}$

А также, что все члены последовательности положительны, т.к. $b>a>1$

Рассмотрим x_{n+1} при неком $n\in N$:

$$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) = 2^{n+1}\left(\sqrt{\left(\sqrt[2^n]{b}\right)} - \sqrt{\left(\sqrt[2^n]{a}\right)}\right) =$$

$$= 2^{n+1} \cdot \frac{\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}}{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}} = \frac{x_n \cdot 2}{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}$$

Заметим, что при $a > 1$ и $n \in N$ $\sqrt[2^{n+1}]{a} > 1$, тогда $\left(\text{т.к. } a > (1)^{2^{n+1}} = 1\right)$

$$\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 1 + 1 = 2,$$ т.е.

$$\frac{2}{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}} < \frac{2}{2} = 1,$$ т.е.

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}} < x_n$$

Значит $x_{n+1} < x_n$ и последовательность убывает. Ч.т.д.
т.к. n-любое при ~~~~ ~~~~ $n \in N$

Задача 4 (10.9).

+ Утв.: многоугольник с чётным количеством вершин, ~~~~ у которого любые 2 соседние по стороне вершины разного цвета (т.е. раскраска ч, б, ч, б ..., ч, б), нельзя разбить на треугольники непересекающимися ~~~~ разноцветными диагоналями.

Д-во: докажем данное утверждение ~~~~ по индукции по n - количество чёрных вершин (т.е. всего вершин 2n)

Продолжение 5 (10.10) Доп. лист 2.

Это утверждение ~~равносильно~~ (неверно) тому, что для любого $k \in N$ найдётся сколь угодно большое N, что $(a_N; k) = 1$

Тогда при достаточно большом N среди чисел $a_{N^2-1}, \ldots, a_{(N+1)^2-1}$ - будут все остатки по модулю k, в том числе и 0, т.е. число $\vdots k$ ч.т.д.

$$a_{n^2+k} = a_{n^2-1} + a_n(k+1) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (2i+1) + a_n \cdot (k+1)$$

при $0 \leq k \leq 2n$

т.к. $(a_N; k) = 1$, то будут все остатки

−

Продолжение 3 (10.8). Доп. лист 1

Пусть $MH = AM = m$

$NH = CN = n$, тогда $MN = n+m$

$$\begin{cases} NH' \cdot n = MH' \cdot m \\ NH' + MH' = NM = n+m \end{cases}$$

n, m - положительные, т.к. H лежит на отрезке MN и не совпадает ни с т. N, ни с т. M

$NH' \cdot n + MH' \cdot n = (NH' + MH')\, n = (n+m)\, n$

$MH' \cdot m + MH' \cdot n = MH'(n+m) = (n+m)\, n$

Отсюда $MH' = n \quad NH' = m$

Тогда $AH' = AM + MH' = m+n$

$CH' = CN + NH' = n+m$, т.е. $AH' = CH'$

Т.е. $B'H'$ - высота и медиана в треугольнике $AB'C$

Тогда он равнобедренный,

т.е. $AB' = CB'$, ч. т. д. +

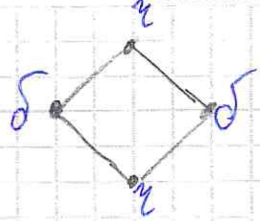
Задача 5 (10.10).

Заметим, что не существует такого N, начиная с которого все ~~числа~~ числа последовательности кратны некоторому числу $d \neq 1$, иначе получается, что вся последовательность кратна этому d т.к. начиная с N все числа кратны d, тогда начиная с $[\sqrt{N}]$ все числа кратны d и т.д. все числа начиная с $[\sqrt{[\sqrt{N}]}]$ с 1 кратны d,

но $a_1 = 1$ значит $d = 1$

Продолжение на доп. листе 2

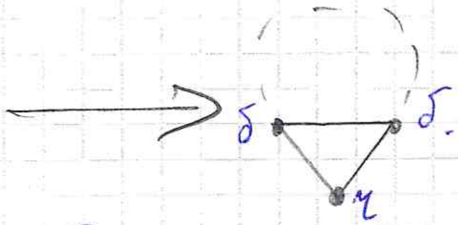
База: $n=2$



– это невозможно, т.к. никакие разноцветные диагонали нельзя провести.

Переход: предположим, что при $n \le k$ – утверждение доказано, докажем при $n=k+1$

Рассмотрим какую-то чёрную вершину. Заметим, что из неё должно выходить хотя бы 1 ребро, т.к. такой случай —

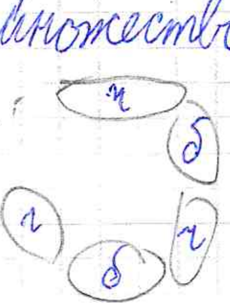


невозможен, т.к. $\overbrace{\text{её}}^{\text{оба}}$ соседа белые.

Тогда это ребро разбивает этот $(2k+2)$-угольник, ~~для кото~~ на 2 меньших чётных-угольника, для которых утверждение доказано по индукции.

Значит при $n=k+1$ утверждение также верно.

Пусть есть какой-то $\overbrace{n}^{\text{выпуклый}}$-угольник с раскрашенными вершинами. Эти вершины разбиваются на множества одноцветных подряд идущих.



Заметим, что этих множеств будет чётное количество (За исключением случая, когда все вершины раскрашены в один цвет, но этот случай очевидно не подходит, поэтому его учитывать не будем)

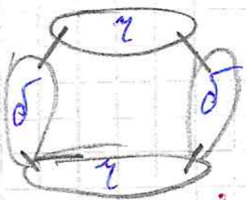
Докажем, что необходимое разбиение существует только когда таких множеств всего 2 (т.е. есть сколько-то (не 0) подряд идущих чёрных вершин и все остальные (не 0) вершины белые).

Докажем, что при количестве множеств хотя бы 4, такого разбиения не существует.

– Утв.: многоугольник с количеством множеств одноцветных подряд идущих вершин хотя бы 4 нельзя разбить на треугольники разноцветными непересекающимися диагоналями.

Д-во: докажем индукцией по n - количество ~~вершин~~ множеств чёрных подряд идущих вершин (всего множеств - 2n)

База: n=2



Прим.: стороны многоугольника также учитываются если соединяют разные цвета

Заметим, что в каждом из множеств есть только 1 вершина, которая соединена с обоими соседними множествами, при чём ~~все~~ эти вершины образуют 4-угольник с чередующейся раскраской

который по ранее доказанному утверждению разбить необходимым образом нельзя. База доказана

Почему?!

КАК ЭТО?

ребром треугольника?

Даже если такие есть:

А зачем такой многоугольник строить?

Что если так?

Этот разбить нельзя. А этот?

Указанные вершины многоугольника не обязаны быть общими вершинами треугольников

Переход: предположим, что при $n \leq k$ утверждение доказано. Докажем при $n = k+1$.

Заметим, что если из какого-то множества (какой-то вершины этого множества) исходит ребро не в соседнее множество, то утверждение верно ~~...~~ (т.к. количество множеств в каждой из 2 частей уменьшилось, а для всех меньших n доказано) ~~...~~

Тогда пусть таких ребер нет. Тогда опять же верно, что ~~...~~ в каждом множестве есть лишь одна вершина, соединённая с обоими соседними множествами, т.к. ~~...~~ диагонали не могут пересекаться (учитывая разноцветные стороны). Тогда эти вершины образуют выпуклый $2(k+1)$-угольник с чередующейся раскраской вершин, который разбить нельзя по ранее доказанному.

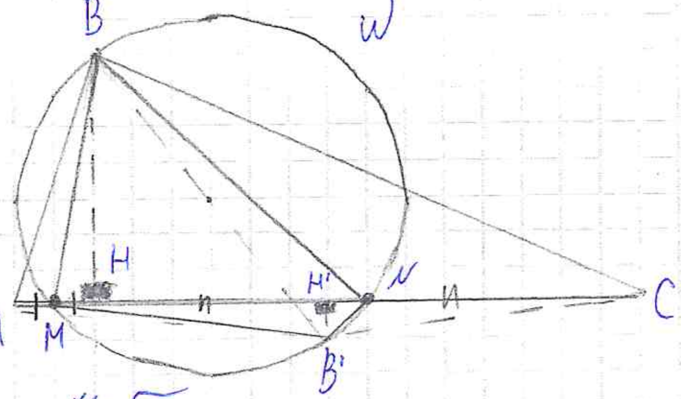
Переход доказан.

Значит при любом $n \geq 2$ утверждение верно

Тогда количество хороших раскрасок можно посчитать, как количество способов выбрать начало чёрного множества (n) на количество способов выбрать начало белого множества ($n-1$) (из оставшихся вершин). Тогда ~~...~~ ответ: $n(n-1)$

Ответ: $n \cdot (n-1)$ – количество хороших раскрасок.

Задача 3 (10.8).



Дано: BH - высота
$AM=MH$
$CN=NH$
ω - описанная около BMN
BB' - диаметр
Д-ть: $AB'=CB'$

Прим: Точки B и B' лежат на разных дугах MN, т.к. проекция точки B попала на отрезок MN. Из этого также следует, что проекция точки B' попадёт на отрезок MN.

Д-во: Пусть $B'H'$ - высота в треугольнике $MB'N$

Заметим, что $\angle BNB' = \angle BMB' = 90°$ как опирающиеся на диаметр.

Заметим, что $\Delta BNH \sim \Delta NB'H'$ по 2 углам
$\angle BHN = \angle B'H'N = 90°$ и $\angle BNH = \angle NB'H' = 90° - \angle B'NH'$

Тогда $\frac{BH}{NH'} = \frac{NH}{B'H'}$ Откуда $BH \cdot B'H' = NH \cdot NH'$

Также $\Delta BHM \sim \Delta MH'B'$ по 2 углам
$\angle BHM = \angle MH'B' = 90°$ и $\angle BMH = \angle MB'H' = 90° - \angle B'MH'$

Тогда $\frac{BH}{MH'} = \frac{MH}{B'H'}$ Откуда $BH \cdot B'H' = MH \cdot MH'$

Тогда $NH \cdot NH' = MH \cdot MH'$

Продолжение на доп. листе 1