Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 1-11-03

Зад. №1

Заметим, что ~~двое~~ если кто-то из двух последних человек - рыцарь (девятый и десятый), то загаданное число не меньше 10, но тогда он не мог сказать ничего из мн-ва вторых утверждений, следовательно предположение не верно и данные люди - лжецы, следовательно число рыцарей не больше 8.

Пример:

Рыцарь/лжец	1-е утвержд.	2-е утвержд.	загад. число
р	>1	<3	2
р	>2	<4	3
р	>3	<5	4
р	>4	<6	5
р	>5	<7	6
р	>6	<8	7
р	>7	<9	8
р	>8	<10	9
л	>9	<2	5
л	>10	<1	5

р - рыцарь л - лжец

1	2	3	4	5	Σ
+ Хр 7ек	∓Б 3ек	∓Б 1Хр	+ГЕ 7ек	0Б 0ек	18

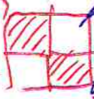
№2

x^2+ax+b (1)

$x^2+ax+b+1$ (2)

Корни (1) тр-на $\left(\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)$ ($\in\mathbb{Z}$), корни (2) тр-на $\left(\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b-4}}{2}\right)$ ($\in\mathbb{Z}$), то ($\sqrt{a^2-4b}\in\mathbb{Z}$)? ($\sqrt{a^2-4b-4}\in\mathbb{Z}$) (иначе иррациональное (вещественное) чис. делит. на 2). То ($a^2-4b=t^2$) (t — неотриц. целое), ($a^2-4b-4=p^2$) (p — неотриц. целое), то ($t^2-p^2=4$) или $\boxed{((t-p)(t+p)=4)}$, заметим, что случаи $\boxed{(t-p=1);\ ((t+p)=4)}$ невозможен (при этом $(t-p)\in\mathbb{Z}$, $(t+p)\in\mathbb{Z}$)), то возможно только $\boxed{(t-p=2);\ ((t+p)=2)}$, то ($t=2$, $p=0$); , то ($a^2=4b+4$), но дискрим. тр-на ($x^2+ax+b+2$): $D=a^2-4b-8<0$, то дан. тр-н корней не имеет

№3



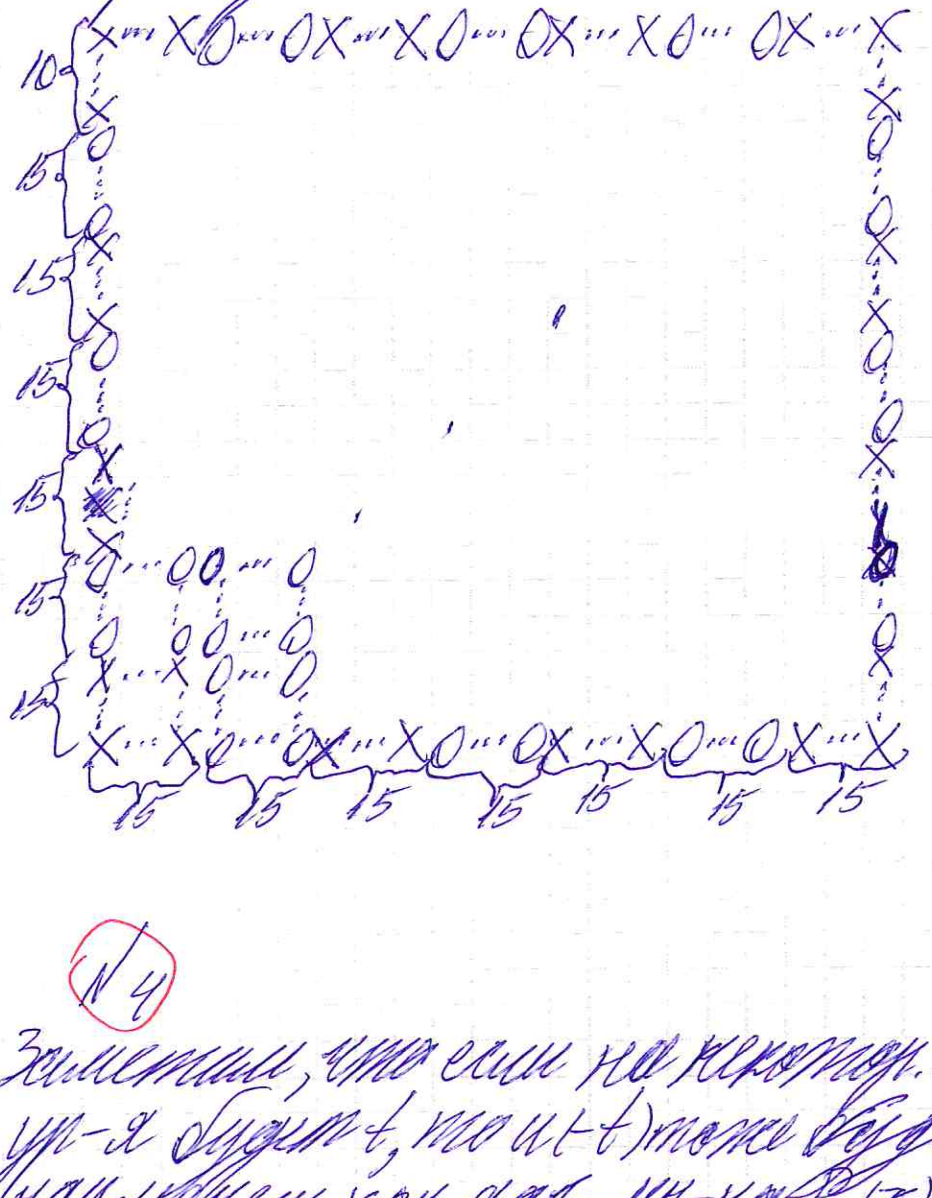
неправда

Рассмотрим квадрат 30×30; заметим, что в нём не может быть более 15^2 отмеч. ~~тот~~ клеток, иначе найдётся такая строка или столбец, в котор. будет не менее 16 отмеч. точек, но такое не может быть, т.к. ~~если пронумер. дан. клет. (напр. влев, слев. напр.), то~~ найдутся две клетки, между котор. расстоян. 15 (так. клет. более 15 нет), что невоз. по услов.. Аналогично в прямоуг. $30\times x$ не может быть более $30\times x$ отмеч. клеток.

То на доске может быть не более (можно понять

рассмотр. лев. нижние 9-ть квадратов 30×30, вер. лев. и нижн. прав. 6-ть прямоуг. 30×10 и квадр. 10×10):
$9\cdot 15^2+6\cdot 15\cdot 10+10^2=2025+900+100=3025$
(прямоуг.)

Пример:



X – отмечен. клет.
O – неотмеч. клет.

№4

Заметим, что если на некотор. этапе корнем ур-я будет t, то $(-t)$ тоже будет корнем. То наименьш. кор. дан. мн-на $P_n(x)$ будет на кажд. этапе отрицат. число (по условию $a_1, a_2, \ldots$ ненулев.
Заметим, что дан. мн-н чётный и при $x\to\pm\infty$:
$P_n(x)\to+\infty$ (старш. коэф-т равен 1)
Заметим, что $P_{n+1}(x)=x^{2n+2}+a_1x^{2n}+\ldots+a_nx^2+a_{n+1}=$

$= x^2 P_n(x) + a_{n+1}$

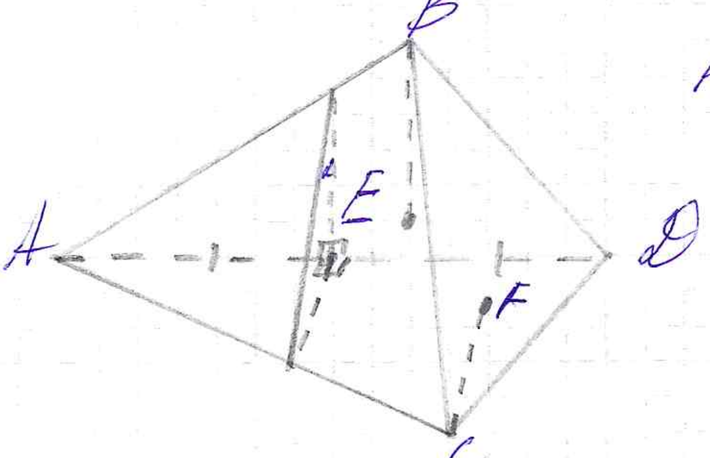
~~По корням мн-на $P_n(x)$ при домнож. на x^2 не меняются, $a_{n+1} < 0$ при $(n+1) > 2018$ по доказ. и усл., $P_n(x)$ при $x < a_{n+1}$~~

~~Заметим, что области убывания и возрастания $P_{2018}(x)$ может быть только ограниченным и при этом при $a < x < a_n$~~

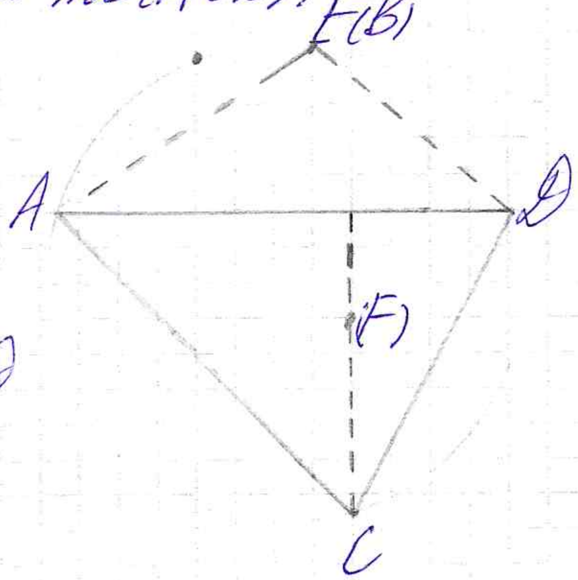
По ~~корням~~ корни мн-на $P_n(x)$ при домнож. его на x^2 не меняются, а т.к. $a_{n+1} < a$ при $(n+1) > 2018$ по доказ. и усл.), ~~при $x \to a_{n+1} - 0$ $P'_n(x) < 0$~~, то $P_{n+1}(a_{n+1}) < 0$, то т.к. при $x \to -\infty$ $P_{n+1}(x) \to +\infty$, то будет корень $a_{n+2} < a_{n+1}$, ч.т.д. (т.к. послед. a_{n+1} ненули предыд.) ~~если $a_n < 0$~~

~~№5~~

№5



пл-ть (ACD):



~~[illegible]~~

6	7	8	9	10	Σ
+СМ	∓ПЕ	+ПБ	± ХФ	−ПЕ	
7 ПЕ	7 НА	7 СМ	4 НА	1 НА	26

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

класс

Шифр 2-11-01

№11.6

Пусть данные четыре числа — $(n+1); n; (n+2)$ и $(n+3)$. Рассмотрим первые три числа и последние: их суммы равны $(3n+3)$; $(3n+6)$, то данные числа делит. на 3. ~~Т.к.~~ ~~на разность~~ $(n \in N)$. Т.к. их разность нечётна (3), то и сами они раз. чётности, то одно из них чётно. При этом каждое из ~~данных~~ них больше сто, что найденная сумма больше трёхсот, то его част. от делен. на 6 (k) больше 50 (то оно не равно ни 2 ни 3), то сумма раскладывается на $(2 \cdot 3 \cdot k)$

№11.7 ∓ +НА

Если данная последов. убывает, то при кажд. n (соответственно):

$2^{n-1}(\sqrt[2^{n-1}]{a}-1) > 2^n(\sqrt[2^n]{a}-1)$, или

$a^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1 > 2a^{\frac{1}{2^n}} - 2$, или

$(a^{\frac{1}{2^n}}+1)^2 > (2a^{\frac{1}{2^n}})^2$ $(a>0)$, или

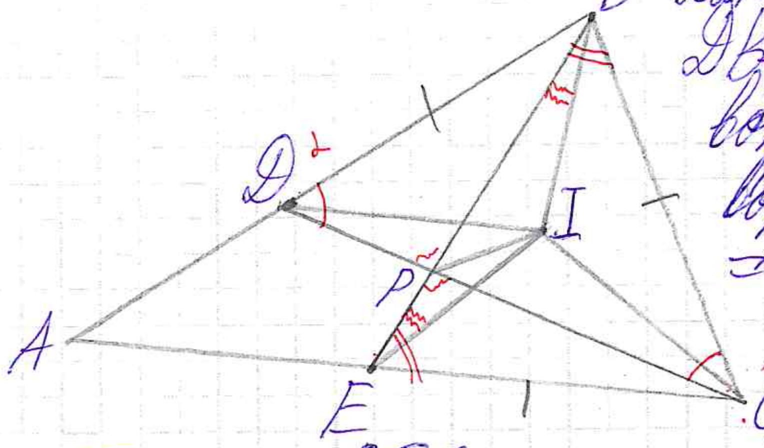
Возведение в квадрат не эквивалентный переход.

$a^{\frac{1}{2^{n-2}}} + 2a^{\frac{1}{2^{n-1}}} + 1 > 4a^{\frac{1}{2^{n-1}}}$, или

$(a^{\frac{1}{2^{n-2}}}-1)^2 > 0$, что верно, т.к. $a \neq 1$

Т.к. данные условия были эквивалентны, и при этом последнее верно при любом n, то действительно любое $x_n < x_{n-1}$, ч.т.д.

№11.8.



Дано: $\triangle ABC$, $D \in AB$, $E \in AC$, $DB = BC = CE$, ω_1 – окр. опис. вокр. $\triangle BDP$, ω_2 – окр. опис. вокр. $\triangle CEP$, $\omega_1 \cap \omega_2 = \{P; I\}$, $CD \cap BE = P$

Док-ть: I – ц. впис. в $\triangle ABC$ окр.

+1. Пусть $\angle BDC = \alpha$, т.к. $\triangle BCD$ – равнобед. ($DB = BC$) то $\angle BCD = \alpha^\circ$, аналогично пусть $\angle BEC = \angle CBE = \beta^\circ$

+2. Т.к. $\angle CPE = \angle BPD$ (как вертикал. углы), $BD = CE$, то радиусы ω_1 и ω_2 равны по обобщ. теор. синусов ($R_1 = R_2$)

3. Т.к. PI – хорда и ω_1, и ω_2, $R_1 = R_2$, то углы одн. окруж., опир. на дугу, стяг. дан. хордой, равны, то ~~$\angle BPI = \angle B$~~ $\angle EBI = \angle BEI = \gamma^\circ$ (пусть), то $\angle CEI = \angle CBI = \beta^\circ - \gamma^\circ$

4. Рассмотр. $\triangle BCI$ и $\triangle ECI$:

5. Т.к. (в $\triangle BEI$) $\angle EBI = \angle BEI$, то $\triangle BEI$ – равнобедр. ($BI = EI$)

1) $EI = BI$

2) CI – общ.

3) $BC = CE$

Вывод: $\triangle BCI = \triangle ECI$ по III приз. рав-ва треуг.

6. Т.к. $\triangle BCI = \triangle ECI$, то $\angle BCI = \angle ECI$, то CI – биссект. $\angle ACB$, аналогично, BI – биссект. $\angle ABC$, то I – ц. впис.

окр. ΔABC

№11.9

Заметим, что ~~т~~ в классе не может быть ученика, котор. ходил бы во все дни, иначе во все дни когда ходили другие ученики ходил и он, что невозможно. Также в классе не может быть одн. пар. учен., ходивш. 1(и) и 2 д(нем), т.к. в таком случае, все, кроме втор. учен., долж. были ходить в тот единств. день, когда он не ходил, в т.ч. и перв. учен., что, понятно, тоже невозможно. То $m \le 28$

оценка +

Пример

№учен.	1д	2д	3д	4д	5д	6д	7д...	всего дней
1	X	—	—	—	—	—	—	29
2	—	—	X	X	X	X	X	2
3	—	X	X	—	—	—	—	28
4	—	X	—	—	X	X	X	3
5	—	X	—	X	X	—	—	27
6	—	X	—	X	—	—	X	4
⋮								⋮

~~№11.10~~

~~Рассмотр. случай, когда~~

№11.10

(Рассмотрим случай, когда x_1 и x_{2n} не
не умн. единности, предполож. $x_1 > x_2 > \dots > x_{2n}$
являются соседними:)

x_{k_1}, x_1, x_{l_1}, x_{m_1}, ..., x_{p_1}, x_{2n}, x_{q_1}, ...

То поменяв местами x_1 и x_{2n}, Вася получит нов. произвед.: $(x_1 \cdot x_{2n})$; $(x_{2n} \cdot x_{m_1})$; $(x_{k_1} \cdot x_{q_1})$; $(x_1 \cdot x_{p_1})$, — но при этом исчезнут произвед. $(x_1 \cdot x_{l_1})$, котор. ~~больше~~ не меньше всех выше перечислен. ($x_1 > x_{p_1}$, $x_1 > x_{l_1}$, $x_{l_1} > x_{m_1}$, $x_{l_1} > x_{2n}$). То можно считать, что x_1 соседствует с x_{2n}:

x_{q_2}, x_{k_2}, x_1, x_{2n}, x_{m_2}, ...

То тут есть произвед.: $(x_{q_2} \cdot x_{k_2})$; $(x_{k_2} \cdot x_1)$; $(x_1 \cdot x_{2n})$; $(x_{2n} \cdot x_{m_2})$. То, т.к. Вася может менять местами x_{2n} и x_{k_2}, то запомнив произвед. $(x_1 \cdot x_{k_2})$ можно считать, что числа x_1 и x_{2n} нет среди выбран. Тогда расставив все оставшиеся числа можно в то место, где будут x_{k_2} (без удаления x_1), т.к. произвед., котор. ~~было~~ запомн. является наибольшим.
То остались числа $x_2, x_3, \dots x_{2n-1}$ (то есть на два меньше), продолжая действовать аналогично.

образами в конце получим: x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, котор. расстав. так ~~(чтобы убр.~~
(чтобы убрать наименьш. произв.

x_{n+2} x_{n-1} x_{n+1} x_n $(x_n \cdot x_{n-1})$)

То возвращая назад убран. числа, ~~так~~ получим, что возможно сделать так, чтобы получив. цикл из $2n$ чисел выглядел, как следующие друг за другом ~~пары~~ пары вида (x_k, x_{2n+1-k}) $k \le n$. При этом, если будет стык чисел втор. вида, то по соображ. чётн. смены „направл." „другой" будет стык и чисел ~~вто~~ перв. вида, то эти. другие можно поменять местами (~~от~~ друг от одного стыка до друг.). Теперь рассмот. случ., когда x_{2n-1} не соседст. с x_1:

x_{2n-1} x_1 x_{2n+1-k} x_k … x_{2n+1-l} x_l x_{2n-1} x_2

То можно поменять x_{2n+1-k} и x_{2n-1} (исчезн. произвед. $(x_1 \cdot x_{2n+1-k})$, то $(x_1 \cdot x_{2n})$ соседств. с (x_2, x_{2n-1}). Дальше можно продолж. аналогич.

То циклы будут выгл. так:

$x_1 \quad x_{2n}$

$x_{2n-1} \quad x_n$

$x_2 \quad x_{n+1}$

$\vdots \qquad \vdots$

То будут „интерес." произвед.:

$(x_1 \cdot x_{2n-1})$; $(x_2 \cdot x_{2n-2})$; ... $(x_{n-1} \cdot x_{n+1})$

То наибольш. будет $(x_1 \cdot x_{2n-1})$ (по-моему), то $x_{(2n-1)_m} = \frac{1-x_1}{2(n-1)}$

То $(x_1 \cdot x_{2n-1})_m = \frac{x_1 - x_1^2}{2(n-1)}$

+

$(x_1 \cdot x_{2n-1})'_m = \frac{1-2x_1}{2(n-1)}$, то $x_1 = 0,5$ (т. максим.), то $(x_1 \cdot x_{2n-1})_m = \frac{1}{8(n-1)}$

(если какой-то другой случай $(x_k \cdot x_{2n-k})$ будет наибольш., то выбор будет: $x_1 = x_k$, $x_{2n-k-1} = 0$)