Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| +. | ± | ∓ | + | 0 | |
| 5 НА | 7 хр | 1 НА | 6 НА | 0 НА | 19 |

_____ класс Шифр 1-11-06

N11.1 Пусть число i-го рыцаря $= x_i$, $i = 1..10$. Запишем фразы, сказанные вначале, относительно этих чисел:

$1 < x_1$
$2 < x_2$
$3 < x_3$
$4 < x_4$
$5 < x_5$
$6 < x_6$
$7 < x_7$
$8 < x_8$
$9 < x_9$
$10 < x_{10}$

Заметим, что 9 и 10 люди не могут быть рыцарями. Действительно, если $x_i \in \mathbb{Z}$ и $>10$, то ни одна из фраз „$x_i < k$", $k \in \{1..10\}$ не верна. (даже при наибольшем $k = 10$ $10 < x < 10$ не имеет ответов для $x$). Аналогично „$x_i < k$", если $x_i > 9$, то наименьшее возможное $x \in \mathbb{Z}$ для верности этой фразы — $x_i = 10$, но тогда любая фраза из второй части ($x_i < k$) также будет ложной. Значит, 9 и 10 не могли сказать правду оба раза, $\Rightarrow$ рыцарей не более 8.

Приведем пример с 8 рыцарями. (будем записывать фразы в виде неравенств для краткости):

$1 < x_1 < 3$ $x_1 = 2$
$2 < x_2 < 4$ $x_2 = 3$
$3 < x_3 < 5$ $x_3 = 4$
$4 < x_4 < 6$ $x_4 = 5$
$5 < x_5 < 7$ $x_5 = 6$
$6 < x_6 < 8$ $x_6 = 7$
$7 < x_7 < 9$ $x_7 = 8$
$8 < x_8 < 10$ $x_8 = 9$
$9 < x_9 < 1$
$10 < x_{10} < 2$

Нет решения (любые $x$, пусть $x_9 = 100$, $x_{10} = 100$)

8 людей сказали правду оба раза $\Rightarrow$ 8 рыцарей.

Итого, выбранные люди

Фраза „мое число больше ..." (рыцари пронумерованы в порядке, котором говорили 1ю фразу)

Фраза „мое число меньше ..."

$x_9 \neq 100$
$x_{10} \neq 100$, т.к. лжецы должны оба раза солгать
а $9 < x_9 = 100$
$10 < x_{10} = 100$ верно.

№11.2

$f_1(x) = x^2 + ax + b$ Корни $f_1, f_2$ есть, и они $\in \mathbb{Z}$.

$f_2(x) = x^2 + ax + b + 1$

$f_3(x) = x^2 + ax + b + 2$.

1. По т. Виета, $f_1(x)$: $-(x_1 + x_2) = a$; $x_1 \cdot x_2 = b$.
$x_1, x_2$ — корни $f_1 \Rightarrow b, a \in \mathbb{Z}$. (сложение, умножение замкнуто на $\mathbb{Z}$).

2. ~~Пусть~~ $D_1$ и $D_2$ (у $f_1$ и $f_2$ соот-но):

$D_1 = a^2 - 4b$

$D_2 = a^2 - 4(b+1) = a^2 - 4b - 4$. Если корни у $f_1$ и $f_2$ целые, то $\sqrt{D} \in \mathbb{Z}$ (иначе если $\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$, ~~то $\sqrt{D}$~~ ~~и так~~ ~~$\notin \mathbb{Z}$~~, $\Rightarrow$ одно из слагаемых в $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$ числителе $\notin \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ а $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ сумма $\notin \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ сумма пополам тоже $\notin \mathbb{Z}$)

Пусть $\sqrt{D_1} = n$, $\sqrt{D_2} = m$. $n, m \in \mathbb{Z}$ по д-му. ($M$ неотрицательны)

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - 4b} = n \\ \sqrt{a^2 - 4(b+1)} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4b = n^2 \\ a^2 - 4b - 4 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = n^2 - m^2. \end{cases}$$

$4 = (n-m)(n+m)$. В силу целости и неотрицательности $n$ и $m$, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n - m = 1 \\ n + m = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} n - m = 2 \\ n + m = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 1{,}5 \\ n = 2{,}5 \end{cases} \quad \cancel{N} (m, n \in \mathbb{Z}) \\ \begin{cases} n = 2 \\ m = 0 \end{cases} \quad \text{Подходит.} \end{array}\right.$$

(Других нет, ибо $n - m \le n + m$ для данных $n$ и $m$, а $4 = 2^2 \Rightarrow$ только ~~2 разл.~~ 3 делителя $\Rightarrow$ только 2 пары можно составить)

$\Rightarrow a^2 - 4b = 4$

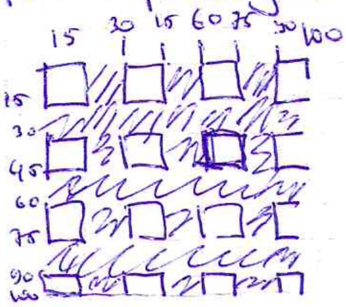
$a^2 - 4b - 4 = 0$.

Тогда рассмотрим $D_3$:

$D_3 = a^2 - 4(b+2) = a^2 - 4b - 8 = (a^2 - 4b) - 8 = 4 - 8 = -4 < 0$.

Значит, т.к $D_3 < 0$, то $f_3(x)$ корней не имеет!

N 11.3. Приведём наибольший пример:



Заметим, что если заставить квадрат 15×15 фишками (= покрасить, отметить), то вокруг него образуется рамка толщиной 15, в которую нельзя ничего ставить.

· □ – полностью отмечен квадрат

ц – места, запрещенные для отметок.

Как видим, влезает 9 – □ 15×15, 6 □ 15×10 и 1 □ 10×10.

$\Sigma = 9 \cdot 225 + 150 \cdot 6 + 100 = 3025$. $\frac{3025}{10000} = \frac{121}{400}$ – нам удалось отметить. (3025 клеток).

Теперь нужно дать достаточную оценку кол-ва помеченных клеток.

случай 1) В каждом квадрате 20×20, коих 25 в 100×100, находится не больше 15×15 = 225 помеченных клеток (и то рамка вылезает за границы поля)

рамка

⇒ N – кол-во отмеч. $\leq 25 \times 225 =$

$= (200+25) \times 25 = 5000 + 625 = 5625$

$N \leq 5625$.

2) Разделим на квадраты 30×30, учитывая, что по краям останутся прямоугольники.

В каждом 30×30 $\leq 225$ помеченных. Почему больше нельзя?

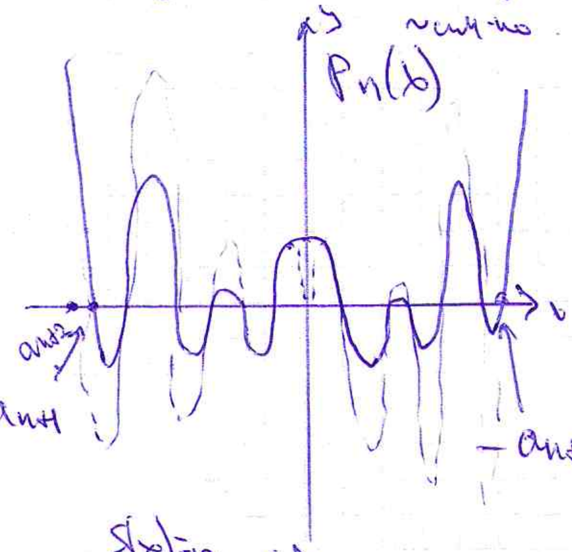
В каждом 10×30 $\leq 15$ помеченных

в 10×10 – все помеченные

$N \leq \cancel{30\times}225 \times 9 + 150 \times 6 + 10 \times 10 = 3025$.

Пример приведён.

№11.4 $P_n(x)$ – четная ф-я, т.е. сим-на относ. $OY$.
Также если $a$ – корень, то $(-a)$ также корень
($x$ везде в степенью $\vdots 2$).




пунктир $g(x) = P_{n+1}(x) - a_{n+1}$.

Что происходит, когда мы переходим от $P_n(x) \to P_{n+1}(x)$?
$P_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot x^2 + a_{n+1}$.
С точки зрения гр-ка функции, мы растягиваем график от оси абсцисс (на $x^2$, т.е. разное растяжение в каждой точке $x$).
Заметим, что при этом корни сохраняются, а также добавляется корень $x = 0$.

Далее график опускают на $|a_{n+1}|$. Очевидно, что $a_{n+1}$ $\forall n \geq 2018$ $< 0$, иначе у $P_n(x)$ был бы только корень $x = 0$, что невозможно в силу ненулевых $a_n$.., и число $a_{n+2}$ становится наименьшим корнем. Но $a_{n+2}$ лежит от оси $OY$ дальше, чем $a_{n+1}$, т.к. происходило растяжение графика и его сдвиг вниз.
Значит, $a_{n+1} > a_{n+2}$. Аналогичные рассуждения можно провести $\forall n \geq 2018$. А значит $\exists N$, при котором $a_n$ становится убывающей (с номера $N$) ($N = 2018$).

и ветви вверх.

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+_{\text{см}}$ | $+_{\text{см}}$ | $+_{\text{ГБ}}$ | $-_{\text{см}}$ | $-_{\text{см}}$ | |
| $7_{\text{НА}}$ | $7_{\text{НА}}$ | $7_{\text{СМ}}$ | $0_{\text{НА}}$ | $0_{\text{НА}}$ | 21 |

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс

Шифр 2-11-02

№11.6.

$\rfloor$ есть числа $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$. $n>100$.

Одно из чисел $(n)$, $(n+1)$ точно $\vdots 2$ — "не кратно" (каждое 2е число $\vdots 2$, а из последовательных тут 2 последовательных). Возьмём ~~этот~~ тогда из них это нечетное и 2 числа, следующих за ним (это получится: $n$, $n+1$, $n+2$ при $n \not\vdots 2$ и $n+1$ $n+2$ $n+3$ при $n \vdots 2$). Заметим также, что среди каждой тройки найдется число, кратное 3. (Ведь это 3 последовательных числа) Если мы сложим эти 3 числа вместе, то их сумма будет $\vdots 2$ (2 нечётных, одно чётное). Также их сумма будет кратна 3 (одно $\vdots 3$, (это очевидно) другое дает остаток 1 от деления на 3, другое - остаток 2 $\Rightarrow$ по модулю 3 получится $0 \Rightarrow$ делится на 3). Значит, сумма чисел делится на 2 и делится на 3. Осталось заметить, что ~~частное~~ частное от деления суммы больше 3:

$\dfrac{n+(n+1)+(n+2)}{6} > \dfrac{300}{6} = 50 > 3$ Значит, сумма представится в виде произведения 2, 3 и ещё какого-то натурального числа, $>3$.

№11.7 Чтобы доказать это, нужно д-ть, что $\forall n \in N$

$x_{n} - x_{n+1} > 0$. ($x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in N \Rightarrow$ последовательность убывающая по стр)

$x_n - x_{n+1} = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right) - 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1\right) =$

$= 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} - 1 - 2\sqrt[2^{n+1}]{a} + 2\right) = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} + 1 - 2\sqrt[2^{n+1}]{a}\right) =$

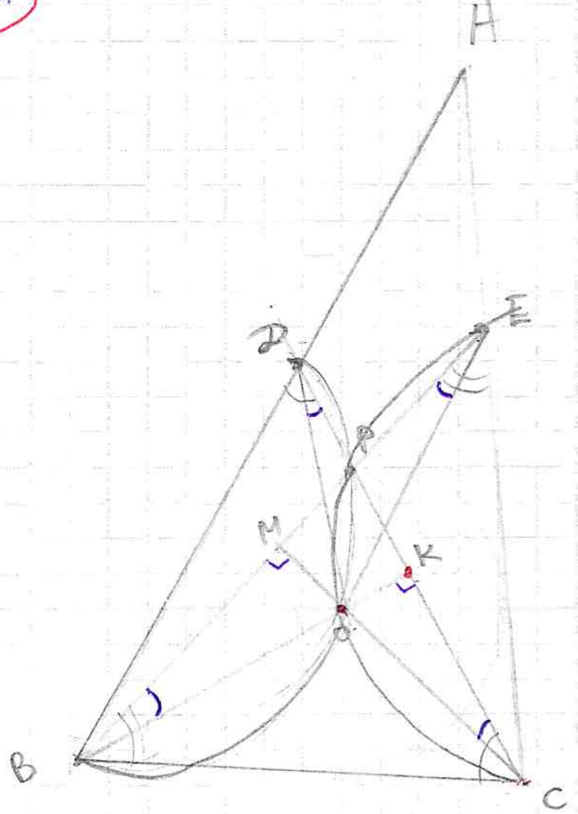
$= 2^n \cdot \left(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1\right)^2 > 0$; $\sqrt[2^{n+1}]{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$, что не может быть по условию задачи

$\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}\right)^2 = \sqrt[\frac{2^{n+1}}{2}]{a} = \sqrt[2^n]{a}$

Значит $\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)^2>0$ $\forall a$ (допустимы) $\forall n$ ⇒

⇒ $x_n - x_{n+1} > 0$ $\forall n$ ⇒ посл-ть убывающая.

№11.8.




Дано: $\triangle ABC$
$D \in AB$
$E \in AC$
$BD = BC = CE$
$BE \cap CD = P$
Д- $\omega_1(EPC)$ $\omega_0$(впис, ABC)
$\omega_2(PBD)$ $\boxed{\text{центр } O}$
Д-ть: $\omega_1 \cap \omega_2 = O$

Д-во:

0. $\omega_1$ и $\omega_2$ по усл. пересекаются в точке P, точка $\boxed{O}$ - ~~вторичное пересечение окр-тей~~

Если фразу игнорировать то решение правильное

① Д.п: BO; BO$_{луч}$ ∩ DC = K.
CO, CO$_{луч}$ ∩ BE = M. OE, OD, BO, OC.

②. $\triangle BDC$: BD = BC (усл) ⇒ равнобедр с осн CD (опр)
$\triangle BCE$: BC = BE (усл) ⇒ равнобедр с осн. BE (опр).
$\angle BDC = \angle BCD$ ; $\angle BEC = \angle EBC$ (по св-ву соотв $\triangle$) равнобед $\triangle$

③. O - центр впис в $\triangle ABC$ ⇒ O - центр пер. ℓ бисс (по св-ву) ⇒
⇒ CM (~~∈ CO~~) - бисс в $\triangle BCE$; BK (~~∈ BO~~) - бисс $\triangle BDC$.
O∈CM O∈BK
CM - бисс к осн в равнобедр $\triangle BEC$ ⇒ M - сер BE; CM ⊥ BE
(св-во бис-сы равноб $\triangle$ к осн)
BK - бисс к осн в равноб $\triangle BDC$ ⇒ K - сер DC ; BK ⊥ CD

4.) $\triangle BOM$ и $\triangle EOM$: MB = ME , OM ⊥ BE ⇒ ∠BMO = ∠EMO = 90° (по ③), OM общ.
⇒ $\triangle BMO = \triangle EMO$ (I ПРТ) ⇒ BO = OE (соотв. эл-ты равных $\triangle$)

$\triangle KOD$ и $\triangle KOC$. $KO$ общ; $OK \perp DC \Rightarrow \angle DKO = \angle CKO = 90°$;
$DK = KC$ (по (3)) $\Rightarrow \triangle DKO = \triangle CKO$ (по ПРТ) $\Rightarrow DO = OC$
(соотв эл-ты равных $\triangle$).

(5) $\angle BMC = \angle BKC = 90°$. $\Rightarrow \omega(BMKC)$, $D$ диаметр $= BC$ (по св-ву двух углов равных, опирающихся на один отрезок ($BC$)). ← [1] здесь. теорема

Значит, $\angle BMO = \angle KCO$ (опираются на одну дугу)
(это же следует из $MOB = KOC$ как верт и т.о $\Sigma \angle \triangle$)

(6) $\angle BEO = \angle EBO$ (в (4) - ~~соотв эл-ты~~ по св-ву равноб $\triangle BOE$ с осн $BE$)
$\angle EBO = \angle MCK$ (из (5))
$\Rightarrow$ $\angle BEO = \angle MCK$. (или $\angle PEO = \angle OCP$, точки на одной прямой)
$\angle ODC = \angle DCO$ (в (4) - по св-ву равноб $\triangle ODC$ с осн $CD$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EBO = \angle OCD$ (из (5)) $\Rightarrow$ $\angle ODC = \angle EBO$ (или $\angle ODP = \angle PBO$, точки на одной прямой).

(7) $\angle PEO = \angle OCP \Rightarrow \omega(EPOC)$ существует (по [1]). отрезок $PO$
Но это $\omega_{опис}(EPC)$, т.к вокруг 3х точек можно описать лишь 1 окр-ть.
$\angle ODP = \angle PBO \Rightarrow \omega(BDPO)$ существует (по [1], отрезок $BO$)
Но это $\omega_{опис}(BPD)$, т.к ... лишь 1 окр-ть

Значит, $\omega_{опис}(BDP)$ проходит через $O$
$\omega_{опис}(PEC)$ проходит через $O$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти окружности вторично (O) пересекаются в точке $O$ — центре вписанной ок-ти $\triangle ABC$.

№11.9 Заметим, что: а) ни один ученик не мог не сходить в бассейн (иначе ∄ дня, когда он сходил, а другой - нет).

б) учеников ~~30~~ ≤29 (действительно, если кто-то ходил в бассейн каждый день, то ∄ дня, когда кто-то был в бассейне, а он - нет.

Также заметим, что если не существует расписания походов (т.е примера) для n человек, то не существует и для (n+1). - иначе можно было бы убрать последнего человека, не нарушив никакие условия ⇒ ∃ был пример на n ⇒ N. (из этого следует, что из невозможности примера для n ⇒ невозможность примера $\forall k \in \mathbb{N}, k > n$).

Для m ~~в~~ людей найдем N ~~наим~~ $\underset{\text{оцени}}{}$ кол-во дней, которое нужно, чтобы расписание из m чел на N дней удовл. условию задачи. ~~Пусть $K_i$ (i=1..m) - учени. ходил в бассейн в расписании ровно i дней. Рассмотрим ученика, который ходил больше всех ⇒ m дней. Тогда понятно, что он не ходил в бассейн хотя бы (m-1) дней - по 1 дню для каждого из~~

Построим пример для m=15 (след страница)

Думаю, что верно равенство! ~~(при N≥2)~~

$N = m + \lceil \log_2 m \rceil$, m - кол.в- людей, N - мин. кол-во дней в расписании

Таким образом, наибольшее решение для N=30:

$\underline{m = 25}$ $(25 + \lceil \log_2 25 \rceil = 25 + 5 = 30)$. Можно больше

↓ номер дня : { список людей, ходивших в этот день }

1 : 1
2 : 2
3 : 2 ~~3~~
4 : 3 163
5 : 3 15
6 : 3 15
7 : 4
8 : 4 14
9 : 4 14 15
10 : 4 13
11 : 5
12 : 5 13 14 15
13 : 5 12
14 : 5 12 13 14 15
15 : 5 11
16 : 6
17 : 6 11 12 13 14 15
18 : 6 10
19 : 6 10 11 12 13 14 15
20 : 6 9 ~~10~~
21 : 6 9 10 11 12 13 14 15
22 : 7
23 : 7 8 ~~10~~ ~~11~~
24 : 7 8 9 10 11 12 13 14 15
25 : 7 8 9 10 11 12 13 14 15
26 : 7 8 9 10 11 12 13 14 15
27 : 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ~~16~~
28 : 7 8 9 10 11 12 13 14 15
29 : 8 9 10 11 12 13 14 15 ~~16~~
30 : 8 9 10 11 12 13 14 15 16

№11.10. Ответ: число $\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$

Этот случай достигается, когда Петя выбрал $2n$ чисел $\left(\frac{1}{2n}\right)$, в сумме $=1$. ~~Вы~~ При любых действиях Васи все произведение $= \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n^2}$.

Посмотрим, что Петя может сделать для увеличения этого числа.

Петя может увеличить какое-то из данных чисел, ~~Вы~~ „заняв" у каких-то других чисел. Очевидно, что Вася тогда будет ставить наименьшие числа вокруг наибольших, чтобы компенсировать их увеличение.

Можно больше