Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

1	2	3	4	5	Σ
+см	∓хр	±НА	∓хр	0см	15
7б	6	3см	2НА	0хр	18

11 класс Шифр 1-11-10

№1

1) Человек, который в первый раз сказал „Моё число больше 10" в любом случае лжец, т.к. среди второй группы высказываний, ~~как~~ нет высказывания, которое могло бы быть правдивым в совокупности с этим. То есть, если число больше 10, оно не может быть меньше 10, 9, 8 и т.д.
Аналогично и с высказыванием „Моё число больше 9". Оно принадлежит лжецу по тем же причинам.
2) Во второй группе высказываний ложными являются высказывания „Мое число меньше 1" и „Мое число меньше 2", т.к. для них нет ни одного соответствующего высказывания из первой группы.
Получается, что всего 4 заведомо ложных высказывания, но если 2 человека скажут по 2 из них (а это минимальное число человек, необходимое, чтобы произнести эти фразы), то остальные 8 ~~лж~~ должны быть рыцарями.
Приведем пример: сократим фразы

„Мое число больше i" $\Leftrightarrow$ $>i$ и
„Мое число меньше j" $\Leftrightarrow$ $<j$, тогда
высказывания можно распределить
следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ >1,\ <3,\ \text{число} - 2 \\ 2)\ >2,\ <4,\ \text{число} - 3 \\ 3)\ >3,\ <5,\ \text{число} - 4 \\ 4)\ >4,\ <6,\ \text{число} - 5 \\ 5)\ >5,\ <7,\ \text{число} - 6 \\ 6)\ >6,\ <8,\ \text{число} - 7 \\ 7)\ >7,\ <9,\ \text{число} - 8 \\ 8)\ >8,\ <10,\ \text{число} - 9 \end{array}\right\}\ \text{рыцари}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9)\ >9,\ <1,\ \text{число} - 5 \\ 10)\ >10,\ <2,\ \text{число} - 5 \end{array}\right\}\ \text{лжецы}$$

Как видим, максимальное кол-во
рыцарей $-$ 8.

12

$x^2+ax+b=0$ $\qquad\qquad$ $x^2+ax+b+1=0$

$D_1=a^2-4b$ $\qquad\qquad$ $D_2=a^2-4(b+1)=D_1-4$

Т.к. у обоих многочленов целые корни, то
их дискриминанты должны ~~быть пол~~
быть квадратами рациональных чисел почему?
Пусть $D_1=m^2$, $D_2=n^2$, тогда $n^2=m^2-4$
Пусть x_1, x_2 – корни первого трехчлена,
тогда по т. Виета $a=-(x_1+x_2)$, $b=x_1x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a, b$ – целые числа $\Rightarrow D_1, D_2$ – целые числа $\Rightarrow$
$\Rightarrow n, m$ – целые числа. почему?

$m^2-n^2=4$

$(m-n)(m+n)=4$

Т.к. m, n - целые числа, то $m-n$ и $m+n$ - делители числа 4.

1) $\begin{cases} m-n=4 \\ m+n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2,5 \\ n=-1,5 \end{cases}$; $m,n \notin \mathbb{Z}$ $\quad \begin{cases} m-n=-4 \\ m+n=-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2,5 \\ n=1,5 \end{cases}$; $m,n \notin \mathbb{Z}$ $\quad \begin{cases} =-1 \\ =-4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} =-2 \\ =-2 \end{cases}$

$\Rightarrow D_2=n^2=0 \Rightarrow$

$x^2+ax+b+2=0$

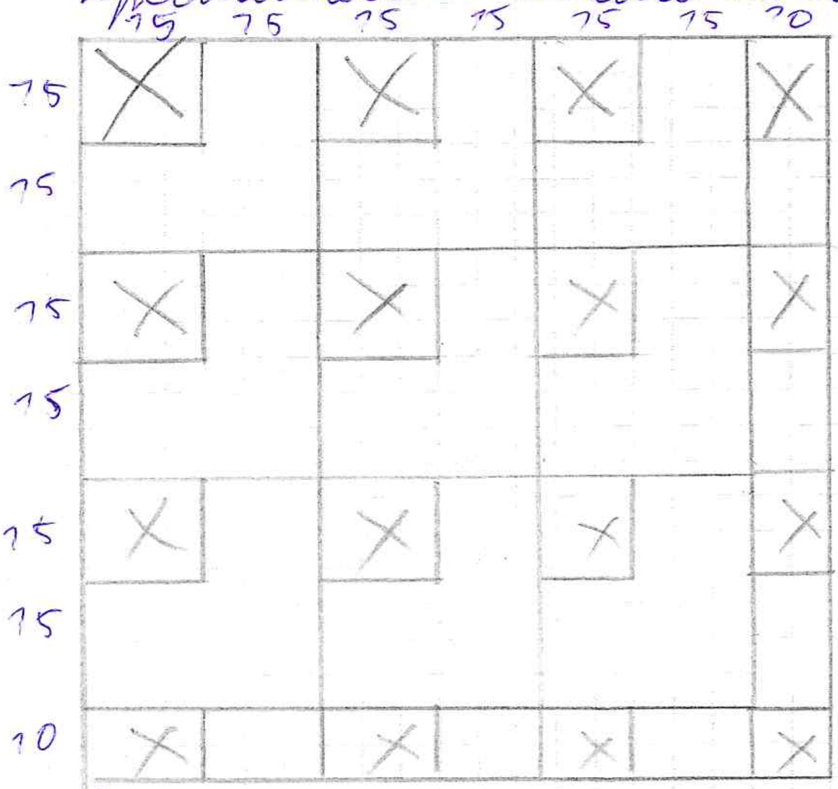
$D_3=a^2-4(b+2)=D_2-4=-4<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ многочлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

№ 11.3

Рассмотрим ~~угловой~~ квадрат из клеток 30×30. Максимальное количество клеток в таком квадрате, удовлетворяющее условию - + $15\cdot15=225$ штук, т. к. ~~на каждую клетку~~ Каждая такая клетка добавляет по 3 уникальные клетки, которые не „перекрываются" другие клетки (3 из 4 углов квадрата 31×31, который „перекрывает" данная клетка, а 4-й угол в любом случае находится вне квадрата 30×30, т. к. $31>30$), что есть всего можно выделить четверть клеток.

Разобьем исходный квадрат 100×100 на квадрат 90×90 и „Г"-образную зону. Квадрат 90×90 мы можем заполнить 9 квадратами 30×30, причем они не будут влиять друг на друга (см. рис, клетки, помеченные крестиком — отмечены)



Оценка для 30×10 ?

В „Г" образной зоне продолжим делить квадрат на квадраты 30×30, оставив то, что влезет. Тогда всего отмеченных клеток:

$10\cdot 10 + 6\cdot 10\cdot 15 + 9\cdot 15\cdot 15 = 3025$ клет.

Ответ: 3025 +

± НА

$n\ 4$

Найдем $P_n(0) = a_n$

Тогда $P_n(x) - P_n(0) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} \dots + a_{n-1} x^2$

$= x^2(x^{2n-2} + a_1 x^{2n-4} + \dots + a_{n-1}) = x^2 P_{n-1}(x)$ ji V +1

при $n > 2018$

Если $x = a_n$, то
$P_n(a_n) - P_n(0) = a_n^2 P_{n-1}(a_n)$
По условию $P_{n-1}(a_n) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P_n(a_n) = P_n(0) = a_n$
Т. к. все степени переменной x в многочлене $P_n(x)$ – четные, то и сам многочлен четный, т. е. если $x = a_{n+1}$ является корнем многочлена, то и $x = -a_{n+1}$ – корень многочлена. Т. к. $x = a_{n+1}$ – наименьший корень, то $a_{n+1} \le 0$. $\checkmark$ +1
Повторив данное действие для всех $n \geq 2013$, находим, что все элементы последовательности $a_{2019}, a_{2020} \dots a_m$ – отрицательные числа.
Для многочлена $P_k(x)$ $x = -a_{n+1}$ – наибольший корень в силу четности многочлена.
~~Допустим, что a_{n+1}~~
Допустим, что для некоторого m
$a_m < a_{m+1}$
Т. к. $a_m < 0$, $a_{m+1} < 0$, то $\frac{a_m}{a_{m+1}} \geq 1$, $|a_m| > |a_{m+1}|$
Найдем $P_{m+1}(x) - P_m(x) =$
$= x^{2m+2} - x^{2m} + a_1(x^{2m} - x^{2m-2}) + \dots + a_{m+1} - a_m$

а дальше?

6	7	8	9	10	Σ
+ск	+п	+б	−сп	$\overline{\text{НА}}$	
7	7	7	0 НА	0 сп	21

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

____ класс

Шифр 2-11-19

№11.6

1) Пусть даны числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$
Из них можно выбрать 3 числа 4 способами, т. е. может получиться 4 различные суммы:

$3n+3$, $3n+4$, $3n+5$, $3n+6$

Допустим, что n – четное число, тогда $3n+6$ – четное число, т. е.

$3n+6 = 3\cdot 2\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)$; Т. к. n – четное число, то $\frac{n}{2}+1$ – натуральное число.

Т. к. $n > 100$, то $\frac{n}{2} > 50 \Rightarrow \frac{n}{2}+1 > 51 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n}{2}+1 \neq 2$; $\frac{n}{2}+1 \neq 3$; $2>1$; $3>1$; $\frac{n}{2}+1>1$

$\Rightarrow$ мы представили сумму в виде произведения 3 различных натуральных чисел, больших 1.

Если n – нечетное число, то $3n+3$ – четное число,

$3n+3 = 3\cdot 2\left(\frac{n+1}{2}\right)$;

$\frac{n+1}{2}$ – натуральное число, т. к. n – нечетное число, 1 – нечетное число $\Rightarrow n+1$ – четное число.

Аналогично $\frac{n+1}{2} \neq 3$; $\frac{n+1}{2} \neq 2$; $2>1$; $3>1$;

Т. к. $n > 100 \Rightarrow n+1 > 101 \Rightarrow \frac{n+1}{2} > 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ При любом ~~из~~ натуральном $n > 100$ можно выбрать 3 числа из четырех последовательных чисел, сумму которых можно представить в виде произ-ведения трех различных натуральных чисел, больших 1.

№ 11 7

Найдем $x_{n+1}-x_n$

$x_{n+1}-x_n = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right) - 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right) =$

$= 2^n\left(2\sqrt[2^{n+1}]{a} - 2 - \sqrt[2^n]{a}+1\right) =$

$= 2^n\left(2a^{\frac{1}{2\cdot 2^n}} - a^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$

Пусть $a^{\frac{1}{2\cdot 2^n}} = b$, тогда $a^{\frac{1}{2^n}} = b^2$ =>

=> $x_{n+1}-x_n = 2^n(2b-b^2-1)$

Заметим, что последовательность убывает, если разность будет отрицательной. Число 2^n положительно при любых n. Рассмотрим функцию $f(b)=2b-b^2-1$

Найдем ее максимальное значение: возьмем производную и найдем, ~~в какой~~ при каком значении b функция максимальна (т.к. $f(b)$ - квадратичная функция с отрицательным коэффициентом перед b^2, то у нее будет только точка максимума)

$f'(b)=2-2b$; $b=1$

$f(b)= 2-1-1=0$, т.е функция не-положительна ~~как~~ при всех b.

Рассмотрим случай, когда $f(b)=0$; $b=1$ =>

$a^{\frac{1}{2n}}=1$

Т. к. $a\neq 1 \Rightarrow \frac{1}{2n}=0$, т.е. значение $f(b)$ не будет равным нулю никогда, т. к. $\frac{1}{2n}\neq 0$

Т. е. ~~f(b) не~~ все значения, ~~f(b)~~ которое принимает $f(b)$ - отрицательны $\Rightarrow$ разность $x_{n+1}-x_n$ отрицательно $\Rightarrow$ последовательность убывает.

№11.9

Максимальное $m = 15$ Можно больше.

Назовем учеников от 1 до 15, построим таблицу с днями в семинаре и учениками. Если данный ученик в данный день был в бассейне, то ставим в соответствующую клетку крестик.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	X																													
2		X	X																											
3			X	X	X																									
4				X	X	X	X																							
5					X	X	X	X	X																					
6						X	X	X	X	X	X																			
7							X	X	X	X	X	X	X																	
8								X	X	X	X	X	X	X	X															
9									X	X	X	X	X	X	X	X	X													
10										X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											
11											X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X									
12												X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X							
13													X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					
14														X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
15															X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	

Иными словами, i-й ученик ходил в бассейн i дней подряд, начиная с i-го дня. Все условия задачи учтены.

№ 11.10

При правильной игре ~~оказаться~~ на доске окажется то число, которое хочет Петя. Или среди $2n$ его чисел $n-1$ будут нулями, а $n+1$ чисел будут равны $\frac{1}{n+1}$, то произведение, вычисленное Васей, будет равно $\frac{1}{(n+1)^2}$. Это максимально возможный результат, которого ~~мог~~ добиться Петя. Петя может получить больше!

Когда Вася будет раскладывать данные числа по кругу, то т. к. нулей на 2 меньше, чем ненулевых чисел, то обязательно найдется пара (~~причем~~ ~~2 пары~~) рядом стоящих чисел $\frac{1}{n+1}$.

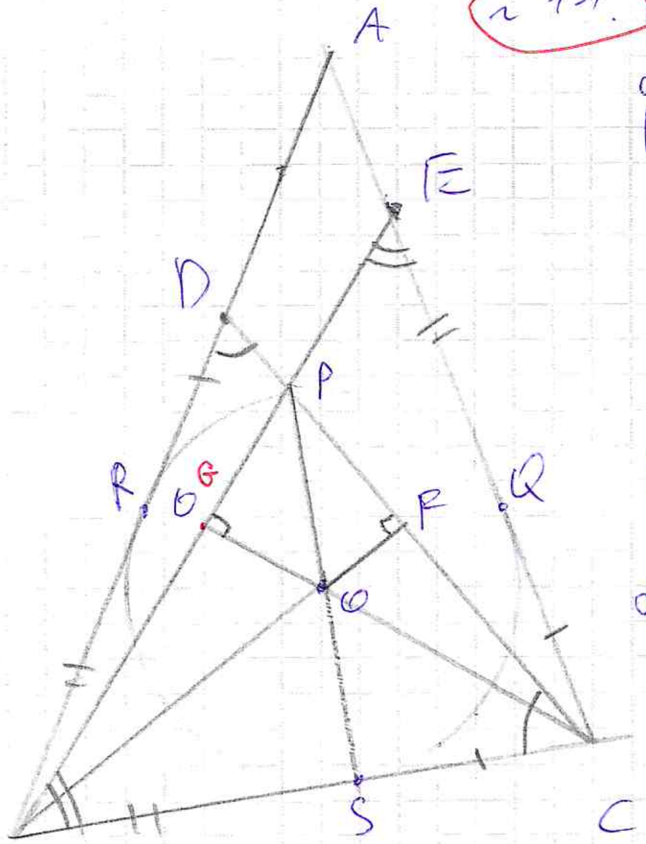
Т. к. все остальные произведения равны нулю, то Вася выпишет именно это произведение, т. е. $\frac{1}{(n+1)^2}$. Вася ничего в данном случае сделать не может.

Также мы не ~~бо~~ можем брать ~~чисел~~

ненулевых чисел меньше, чем $n+1$.
В ином случае Вася сделает так, что все произведения будут равны нулю.
А если брать их больше, то сами числа и конечное ~~произв~~ произведение будут меньше. Если брать неравные числа, то Вася будет стараться самое большое число умножать на самое маленькое, чтобы произведение было минимальным.

№ 11.8

НА



Дано: $\triangle ABC$
$D \in AB$; $E \in AC$; $DB = BC = CE$
$BE \cap CD = P$
$W(O;R)$ – вписана в $\triangle ABC$
$W_1(O_1;R_1)$ – описана около $\triangle BDP$
$W_2(O_2;R_2)$ – описана около $\triangle CEP$

Доказать: $W_1 \cap W_2 = O$

Решение.

1) R, Q, S – точки касания с W с AB, AC и BC соотв-но

2) По теореме об отрезках касательной $RB = BS$; $SC = CQ$; т.к. $DB = BC = CE \Rightarrow$
$\Rightarrow EQ = BS$; $DR = SC$

3) Пусть $\angle BDC = \alpha$, т.к. $BD = BC \Rightarrow \angle BCD = \alpha$
Тогда $\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$; т.к. BO – биссектриса, то

$\angle OBC = \angle ABC \cdot \frac{1}{2} = 90 - \alpha$

4) Пусть $BO \cap CD = F$; $CO \cap BE = G$

5) В $\triangle BFC$ $\angle BGC = 180 - \angle FCB - \angle FBC =$
$= 180 - \alpha - (90 - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow BF \perp DC$

6) Аналогично $CG \perp BE$

7) Чтобы доказать, что $\omega_1 \cap \omega_2 = O$, необходимо доказать, что $EPOC$ и $DPOB$ – вписанные четырехугольники.

8) $\angle$ ~~ABP = ∠ABC − ∠EBC~~ Пусть $\angle ABE = \beta$
Тогда $\angle EBO = \angle ABC \cdot \frac{1}{2} - \angle ABE = 90 - \alpha - \beta$
$\angle GOB = 90 - \angle EBO = \alpha + \beta$

9) Т.к. $PS \perp BC$ $\Rightarrow$ рассмотрим $\triangle BPS$ и $\triangle GPO$
$\angle G = \angle S = 90^\circ$
$\angle BPS$ – общий $\Bigg| \Rightarrow \triangle BPS \sim \triangle GPO \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle POG = \angle PBC =$
$= \angle PBO + \angle OBC = 180 - 2\alpha - \beta$

10) $\angle BDP + \angle POB = \angle BDP + \angle POG + \angle BOG =$
$= \alpha + 180 - 2\alpha - \beta + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow$ в $DPOB$ сумма противоположных углов равна $180^\circ \Rightarrow$ он вписан в ω_1 (т.к. $\triangle DPB$ вписан в ω_1)
$\Rightarrow O \in \omega_1$

11) Аналогично $O \in \omega_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow O = \omega_1 \cap \omega_2$
ч.т.д.