Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	−	26
5	7	7	7	0	

_____ класс Шифр ______

№11.1

предположим что ~~все~~ десятый сказал правду, тогда пусть x_{10} - число загаданное 10-тым, а k_{10} - число из фразы 10-того „моё число меньше...", тогда $10 < x_{10} \le k_{10} \le 10$, т.е $10 < x < 10$ противоречие

аналогично для девятого $9 < x_9 < k_9 \le 10$, т.е $9 < x_9 < 10$ противоречие при $x_9 \in \mathbb{Z}$

тогда не больше 8 человек могли сказать правду

для $i \in [1;8]$ i-тый человек загадал $i+1$ и сказал „моё число меньше $i+2$", а 9-тый и 10-тый загадали ~~что-у~~ любое целое число и сказали моё число меньше 1 и 2 соответственно

9-ный и 10-ний не могли загадать любое целое, т.к если они лжецы, то обязаны были соврать.

Ответ: 8 рыцарей

№11.2

докажем, что a и b - целые числа, по условию, x^2+ax+b имеет целые корни, назовем их x_1 и x_2 (возможно $x_1=x_2$), тогда, по теореме Виета, $a=-x_1-x_2$ (целое, т.к (сумма целых)), а $b=x_1\cdot x_2$ (целое, как произведение целых)

посчитаем дискриминанты первых двух уравнений $D_1=a^2-4b$ $D_2=a^2-4b-4=D_1-4$, так как корни целые и a целое и $x_1,x_2=\frac{-a\pm\sqrt{D_1}}{2}$, тогда $\sqrt{D_1}$ - целый и $\sqrt{D_2}$ - целый пусть $c_1=\sqrt{D_1}\ge0$; $c_2=\sqrt{D_2}\ge0$ тогда $c_2^2=c_1^2-4$ ~~или~~ $c_1^2-c_2^2=4$ $(c_1-c_2)(c_1+c_2)=4$ $c_1-c_2\ge1$, т.к c_1 и c_2 - целые тогда $c_1+c_2\le4$ при $c_1=4$ $c_2=\sqrt{12}\notin\mathbb{Z}$; $c_1=3$ $c_2=\sqrt5\notin\mathbb{Z}$; $c_1=2$ $c_2=\sqrt0=0\in\mathbb{Z}$; $c_1<2$ $c_2^2<0$ $c_2\notin\mathbb{R}$ тогда $c_1=2$ $c_2=0$

$D_3=a^2-4b-8=c_2^2-4=-4<0$ корней у III уравнения нет

№11.4

посчитаем $P_{n+1}(x) = x^{2n+2} + a_1 \cdot x^{2n} + a_2 \cdot x^{2n-2} + \ldots + a_n \cdot x^2 + a_{n+1} =$
$= x^2 \cdot P_n(x) + a_{n+1}$

заметим, что $P_n(-x) = \ldots = P_n(x)$, т.е $P_n(x)$ - чётный ~~много~~ многочлен (т.к. P_n - сумма чётных одночленов)

докажем, что при $n \geq 2018$ $a_{n+1} \leq 0$ (+)

пусть $a_{n+1} \geq 0$ ($a_n \neq 0$ по условию), тогда $P_n(a_{n+1}) = 0$
но $P_n(x)$ - чётна, тогда $P_n(-a_{n+1}) = 0$ $-a_{n+1} < 0 < a_{n+1}$
тогда a_{n+1} - не наименьший корень — противоречие
тогда при $n \geq 2018$ $a_{n+1} < 0$ или при $n \geq 2019$ $a_n < 0$
рассмотрим график функции ~~$f(x) = P_n(x)$~~ $P_n(x)$ при $n \geq 2018$
при $x \to -\infty$ $P_n(x) \to \infty$ т.е $P_n(x) > 0$, тогда в точке $(a_{n+1}; 0)$ ~~фу~~ ~~гра~~ график функции переходит из верхней полуплоскости либо в нижнюю, либо обратно в верхнюю (что соответствует тому, что $P_n'(a_{n+1}) \leq 0$), т.к. в противном случае он бы пришёл из нижней полуплоскости, что означало бы что на $(-\infty; a_{n+1})$ есть корень ~~меньший~~ a_{n+1}, что противоречит условию.

рассмотрим $P_{n_1}(x) = x^2 P_n(x) = P_{n+1} - a_{n+1}$ (+)

~~при~~ т.к. $x^2 \geq 0$ при $P_n(x) > 0$ $P_{n_1}(x) > 0$ при $x \neq 0$
$P_{n_1}(x) = 0$ при $x = 0$
при $P_n(x) < 0$ $P_{n_1}(x) < 0$ при $x \neq 0$
$P_{n_1}(x) = 0$ при $x = 0$
при $P_n(x) = 0$ $P_{n_1}(x) = 0$

Но это и далее?

~~т.к. $P_n(x)$ при $x <$~~ тогда $P_{n_1}(a_{n+1}) = 0$

тогда $P_{n+1}(a_{n+1}) = P_{n_1} + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} = a_{n+1} < 0$ (+)

$x \to -\infty$ $P_{n+1}(x) > 0$ $P_{n+1}(a_{n+1}) < 0$, тогда $\exists x \in (-\infty; a_{n+1})$: $P_{n+1}(x) \leq 0$
тогда a_{n+2}, по условию, - наименьший из x $a_{n+2} < a_{n+1}$ при $n \geq 2018$

т.е ~~a_{n+1}~~ ~~$a_n \Rightarrow a_{N+1} < a_N$ при N~~ $a_{n+1} < a_n$ при $n \geqslant 2019$

$N=2019$

<u>Ответ</u> $N=1019$

N 11.3

докажем оценку сначала для 3 прямоугольников

1) в квадрате 30×30 есть 15^2 квадратов 16×16

в квадрате 16×16 рассмотрим клетки стоящие в углах расстояние между любыми двумя из них 15, тогда отметить можно не более одной из них

тогда в квадрате 30×30 можно отметить не более 15^2 клеток

2) в прямоугольнике 30×10 и 10×30 разобьём клетки на пары клетка из левой половины (или верхней если 30×10) с клеткой из правой (нижней) половины в той же строке (столбце) на расстоянии 15

в каждой паре можно отметить не более 1

оценка+ Всего пар 15×10, тогда в 30×10 и 10×30 можно отметить $\leq 15\cdot10$

3) в прямоугольнике 10×10 можно отметить не более 10^2 клеток

разобьём квадрат 100×100 как на рис получим

9 квадратов 30×30 1 - 10×10

3 прямоугольника 30×10 и 3 - 10×30

Оценка: $9\cdot15^2+2\cdot3\cdot15\cdot10+10^2=(45+10)^2 = 55^2 = 3025$ + пример

Пример на 3025: смотреть рис

☒ - отмеченные клетки 5×5

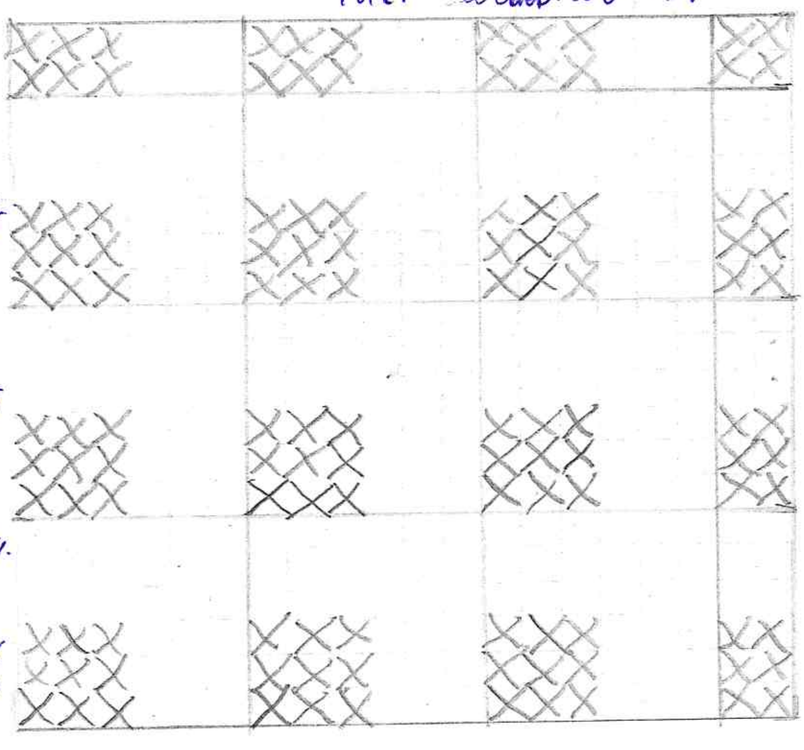
☐ - не отмечены клетки 5×5

всего 121 клетка по 25 отмечен. них $121\cdot25=3025$

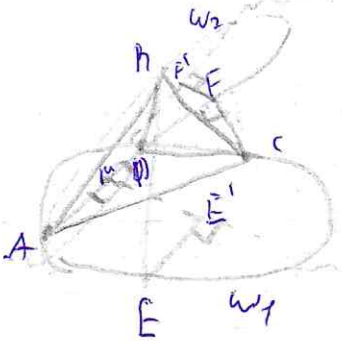
расстояние 15 - расстояние 3 на рисунке но нём нет двух отмеченных клеток на расстоянии 3

<u>Ответ</u>: 3025

Рис. масштаб 1:5



№11.5 Дано



α

$ABCD$ — тетраэдр

$BE \perp (ACD)$ $E \in (ACD)$

$\{A;C;D;E\} \in \omega_1$ - окруж.

$CF \perp (ABD)$ $F \in (ABD)$

$\{A;B;D;F\} \in \omega_2$ - окр

α - плоскость $\alpha \perp AD$

M - середина AD $M \in \alpha$

Д-ть

$\rho(F;\alpha) = \rho(E;\alpha)$

~~Решение~~ Д-во

в пл (ADC) введём систему координат ~~DA~~ луч DA - ось x M - точка $(0;0)$ ME' - ось y (E' - проекция E на $\alpha \cap (ADC)$)

$AD \perp \alpha$, тогда $AD \perp ME'$, тогда $AD \parallel EE'$ тогда $EE' \perp \alpha$

$\rho(E;\alpha) = |EE'|$

~~пусть~~ пусть центр окружности ω_1 - O_1 имеет координаты $(0; a_1)$ ($O_1 \in ME'$ т.к ME' - серединный перпендикуляр к хорде AD окр ω_1), и радиус $\omega_1 = r_1$

пусть $\rho(O_2; AD) = a_2$ и радиус ω_2 - r_2

пусть ~~угол между~~ $\angle(ADC)(ADB) = \alpha$

тогда $\omega_1 \Rightarrow x^2 + (y - a_1)^2 = r_1^2$ $x^2 = r_1^2 - (y - a_1)^2$

проекция ω_2 на $(ACD) \rightarrow x^2 + \left(\frac{y}{\cos\alpha} - a_2\right)^2 = r_2^2$ $x^2 = r_2^2 - (y_1 - a_1)^2$

~~возможную координату~~ y для E ~~можно~~ получить приравняв эти части $r_1^2 - (y - a_1)^2 = r_2^2 - \left(\frac{y - a_2}{\cos\alpha}\right)^2$, ~~то~~ и раскроем ~~скобки~~ получим уравнение ~~второй~~ степени относительно

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

6	7	8	9	10	Σ
+ рк	$+_{НА}$	$+_{НА}$	$0_{СИ}$	$\mp_{НА}$	
$0_{НА}$	$7_{СИ}$	$7_{Б}$	$0_{НА}$	$1_{ПБ}$	21

_____ класс

Шифр 2-11-15

№ 11.6

пусть наименьшее число – a, тогда остальные – $a+1$; $a+2$; $a+3$

рассмотрим 2 случая

1) $a \vdots 2$ – возьмём $a+1$; $a+2$; $a+3$ получим $3a+6$

$3a+6 \vdots 3$ и $3a+6 \vdots 2$

2) $a \not\vdots 2$ – возьмём a; $a+1$; $a+2$ получим $3a+3$

$3a+3 \vdots 3$ и $3a+3 \vdots 2$

тогда сумма делится на 3 и на 2, т.е на 6, а сама сумма $> 3a \geq 300 > 6$, тогда $\frac{\text{сумма}}{6}$ – натуральное число > 1 Не равно 2 и 3?

№ 2

сравним x_n и x_{n-1}

$$\left(2\sqrt[2^n]{a}-1\right)\cdot 2^n \overset{?}{\leq} 2^{n-1}\left(2\sqrt[2^{n-1}]{a}-1\right)$$

$$\frac{\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}-1\right)\cdot 2}{\sqrt[2^n]{a}+1} \overset{?}{<} \left(\sqrt[2^{n-1}]{a}-1\right)$$

$$\sqrt[2^n]{a}-1=\frac{\sqrt[2^{n+1}]{a}-1}{\sqrt[2^{n+1}]{a}+1}\cdot$$

$$\frac{\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}-1\right)\left(2-\sqrt[2^n]{a}-1\right)}{\left(\sqrt[2^n]{a}+1\right)} < 0$$

$\sqrt[2^n]{a}+1 > 0$ всегда

$$\frac{\left(\sqrt[2^{n-1}]{a}-1\right)\left(1-\sqrt[2^n]{a}\right)}{\sqrt[2^n]{a}+1} < 0$$

при $a<1$

$\sqrt[2^{n-1}]{a}-1<0$; $1-\sqrt[2^n]{a}>0$

тогда $x_n < x_{n-1}$

при $a>1$

$\sqrt[2^{n-1}]{a}-1>0$ $1-\sqrt[2^n]{a}<0$

+

$+_{НА}$

№ 11.10

пусть x_1 - наибольшее из чисел

~~докажем, что при любом x_1 остальные числа $x_2 \dots x_n$ должны быть равны между собой~~

пусть x_2 - наименьшее число если $x_2 = 0$, то Петя всё ещё может получить оптимальный ответ отличный от 0, благодаря тому, что на $\sum_{i=3}^{2n} x_i$ отведено больше, чем если бы $x_2 > 0$

если ~~будет~~ среди $x_3 \dots x_{2n}$ есть хотя бы один который меньше других, тогда Вася поставит его рядом с x_1, чем ~~ухудшит~~ уменьшит ответ, а взяв другие два ~~числа~~ x_i и x_j можно будет получить результат больший, чем при произведении x_1 на ~~треу~~ $\frac{1-x_1}{2n-2}$, только если Петя играет не оптимально, что противоречит условию, тогда число, которое будет выписано $x_1 \cdot \frac{1-x_1}{2n-2}$ пусть

$x_1 = (k+2)\left(\frac{1-x_1}{2n-2}\right)$, тогда $x_3 \dots x_{2n} = \frac{1}{2n+k}$ $x_1 = \frac{k+2}{2n+k}$, искомое произведение $\frac{k+2}{(2n+k)^2}$ найдём максимум этой функции посчитав производную по k $\frac{(2n+k)^2 - 2(2n+k)\cdot(k+2)}{(2n+k)^4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2n+k-2(k-4)}{(2n+k)^3} = 0$ ~~при~~ $\Leftrightarrow \frac{2n-4-k}{(2n+k)^3} = 0 \Leftrightarrow$ при $\begin{cases} k = 2n-4 \\ k \neq -2n \end{cases}$ ~~т.е. при~~ $\Updownarrow$ $\begin{cases} k = 2n-4 \\ n \neq 1 \end{cases}$

тогда произведение - $\frac{2n-2}{(4n-4)^2} = \frac{1}{8(n-1)}$

заметим, что $k = 2n-4$ - максимум, а не минимум

при $k = 0 < 2n-4$

$\frac{2}{4n} = \frac{1}{8n} < \frac{1}{8(n-1)}$

при $k = 2n-2 > 2n-4$

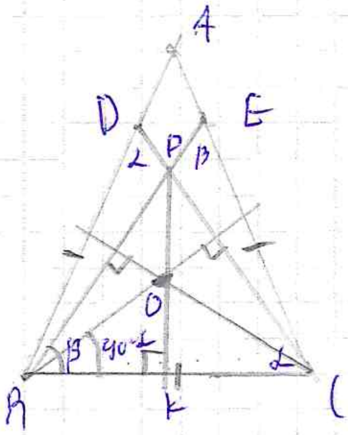
$\frac{2n}{(4n-2)^2} - \frac{1}{8(n-1)} =$ ~~$\frac{8n(n-1)-16n^2}{8n(n-1)}$~~ $\frac{16n(n-1) - 16n^2 + 16n - 4}{(4n-2)^2 \cdot 8(n-1)} =$

$= \frac{-4}{(4n-2)^2 \cdot 8(n-1)} < 0$ тогда $\frac{2n}{(4n-2)^2} < \frac{1}{8(n-1)}$

только пример

ответ: $\frac{1}{8(n-1)}$

№ 11.8



Дано

$\triangle ABC$ $D \in AB$ $E \in AC$

$DB = BC = CE$ $BE \cap CD = P$

ω_1 - окр $\{B; D; P\} \in \omega_1$

ω_2 - окр $\{C; E; P\} \in \omega_2$

ω_3 - окр - вписанная в $\triangle ABC$

O - центр ω_3

Д-ть

$O \in \omega_1 \cap \omega_2$

Д-во

пусть $\angle BDC = \alpha$, а $\angle BEC = \beta$ $BD = BC$, тогда $\triangle BDC$ равнобедренный, тогда $\angle DCB = \alpha$, аналогично $\angle EBC = \beta$

~~пусть о - центр~~ CO в $\triangle BCE$ - ~~выс~~ биссектриса к основанию, тогда $CO \perp EB$, аналогично $BO \perp DC$

тогда в $\triangle BPC$ O - точка пересечения высот, тогда PO высота, т.е. $PO \perp BC$

в $\triangle DBC$ BO - биссектриса, тогда $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle DBC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle BDC) = 90^\circ - \alpha$

пусть $K = PO \cap BC$ в $\triangle BOK$ $\angle BOK = 180^\circ - \angle OBK - \angle OKB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha$

$\angle BOK$ - внешний для $\angle POB$, тогда $\angle POB = 180^\circ - \angle BOK = 180^\circ - \alpha$

в четырёхугольнике $BDOP$ $\angle PDB = \alpha$ $\angle POB = 180^\circ - \alpha$ тогда точки $B; D; O; P$ лежат на одной окружности, по условию для точек $B; D; P$ - это ω_1, тогда $O \in \omega_1$

аналогично $O \in \omega_2$, тогда $O \in \omega_1 \cap \omega_2$

+ 7А

№11.9

пример для ~~25~~ m = ~~16~~ 22

~~1 сходил 3 раза в 1, 2 4 5 дни~~
~~2 сходил 4 раза в 1, 2, 3 и 4 дни~~
~~2 сходил 26 раз с 5 по 30 дни~~

~~i-тый сходил i+2 раз в пять дн~~
~~вышло если выписать все числа от 0 до 21~~
~~вывернуть перевести их в двоичную систему~~
~~счисления убрать все числа 10000 и~~

~~3 - 5 раз в первые 5 дней~~
~~4 - 6 раз во II по 7 дни~~

для i от 1 до 22
i-тый ходил i раз