Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

1-11-21

	2	3	4	5	Σ
	∓ск	+ск	∓ге	0ск	
7 см	6б	7 хр	4 ск	0 НА	24

_____ класс

Шифр 1-11-21

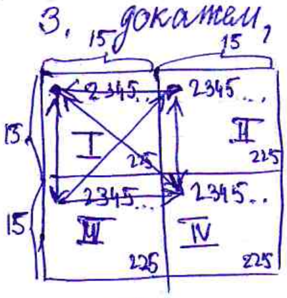
11. №3

Оценка:

1. докажем, что в полоске 1x30 не может быть больше 15 отмеченных. Давайте каждую клетку 1 до 15 соотнесём с клеткой от 16 до 30, т.е. i-ой клетке в пару идет i+15, и каждой клетке соответствует ровно одна другая. Тогда если мы возьмём одну клетку из пары, мы не можем взять вторую. Значит всего не более 15.

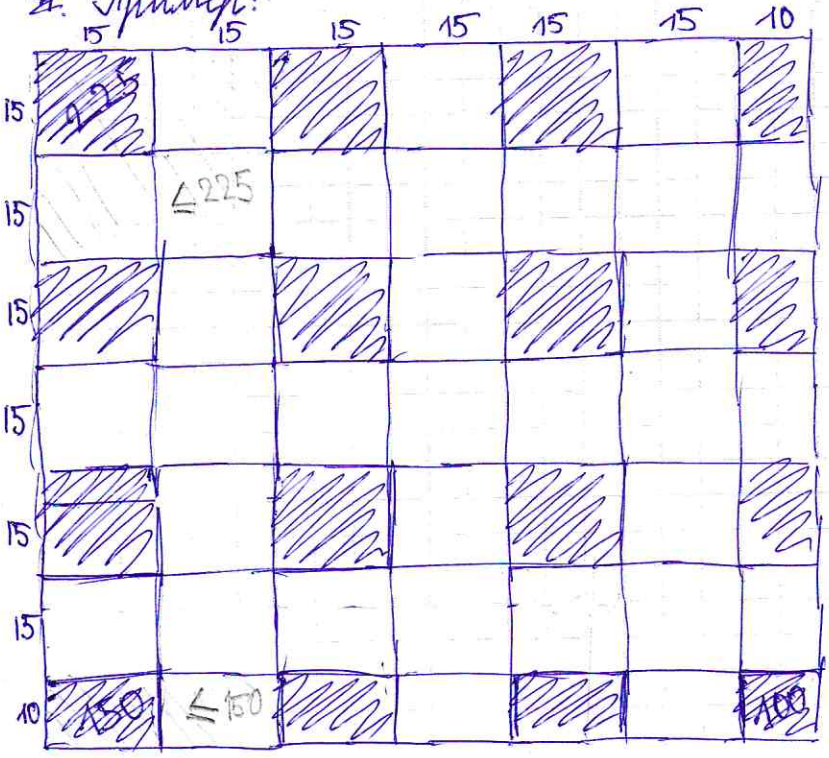
2. докажем, что в прямоугольнике 10x30 не более 15·10 = 150 клеток. Такой прямоугольник состоит из 10 полосок 1x30, в каждой из которых ≤ 15, тогда всего не более 15·10=150 клеток.

3. докажем, что в квадрате 30x30 не более 15x15=225 клеток.



Давайте пронумеруем числами от 1 до 225 клетки во всех 4-ёх квадратиках, ~~Зат~~ при этом одинаковым способом слева направо, сверху вниз. Тогда если мы взяли ~~одну~~ клетку в одном из квадратов, мы не можем взять 3 оставшиеся клетки с таким же номером, т.к. расстояние будет равно 15. Значит всего не более 15x15=225 клеток

Пример:



Возьмём закрашенные области.

Всего: $9\cdot 15^2 + 6\cdot 15\cdot 10 + 10\cdot 10 =$

$= 3025$

Очевидно, что пример корректен

Больше нельзя, так как квадрат разбивается на 9 кв. 15x15, 6 прямоуг. 10x30 и кв. 10x10. Всего $\le 9\cdot 15^2 + 6\cdot 15\cdot 10 + 10\cdot 10 \le 3025$

Ответ: 3025

№11. 1

Оценка:

последние двое не могут быть рыцарями, так как иначе число у каждого ≥ 10, но число у каждого рыцаря ≤ 9, так как во второй раз они сказали правду, т.е. < 10.

Значит всего не более 8 рыцарей

Пример:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I: №:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Р/Л:	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л
число:	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10

II: порядок:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№:	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
Р/Л:	Л	Л	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
число:	9	10	2	3	4	5	6	7	8	9

№11. 2

Если корни целые и существуют то по т. Виета $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, т.к.

$a = -x_1 - x_2$, $b = x_1 x_2$ (целое). Если корни целые, то ~~D~~ дискриминант первых двух уравнений — квадрат целого числа, Почему? т.е.

$D_1 = a^2 - 4b = t_1^2$, $t_1 \in \mathbb{Z}$

$D_2 = a^2 - 4b - 4 = t_2^2$, $t_2 \in \mathbb{Z}$, тогда

$(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 4$

т.к. t_1 и t_2 целые, то ~~ед~~ единств. варианты равенства:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (t_1 - t_2) = -2 \\ t_1 + t_2 = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} t_1 - t_2 = 2 \\ t_1 + t_2 = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Почему?

$\Rightarrow$ тогда $t_2 = 0$.

т.е. $D_2 = a^2 - 4b - 4 = t_2^2 = 0$.

~~D3~~ Дискриминант уравнения $x^2 + ax + b + 2$ равен

$D_3 = a^2 - 4b - 8 = D_2 - 4 = -4 < 0$

Тогда нет решений.

№11.4. $\mp$

Заметим, что: ~~при~~ ~~$n \geq 2018$~~ $n \geq 2$.

$P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$. $+$

~~Пускай~~ Заметим, что если ~~$\exists x: P_n$~~ $\exists N \geq 2018: a_N < 0$,

то ~~$\forall N' \geq N$~~ $\forall N' > N$, $a_{N'} < a_{N'-1}$, т.к.

Если $a_N < 0$, то $P_{N-1}(a_N) = 0$

$P_N(x) = x^2 P_{N-1}(x) + a_N$ в т. $x = a_N$

$P_N(a_N) = 0 + a_N$, $a_N < 0$, т.е. $P_N(a_N) < 0$, но

$P_N(-\infty) > 0$, тогда $\exists$ x_0: $x_0 < a_N$, $P_N(x_0) = 0$,

~~Т.~~ ~~Т~~ Тогда $a_{N+1} < x_0 < a_N$, т.е. $a_{N+1} < a_N$.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 2-11-08

№11.6.

Пусть a – первое число, тогда последовательность такая:

a; $a+1$; $a+2$; $a+3$

Сумма первых 3-ёх чисел: $S_1 = a+(a+1)+(a+2) = 3(a+1)$

последних 3-ёх чисел: $S_2 = (a+1)+(a+2)+(a+3) = 3(a+2)$

Заметим, что либо $S_1 \vdots 2$, либо $S_2 \vdots 2$. ~~Но~~ Пускай $S_1 \vdots 2$ (если S_2, то аналогично). Тогда $S_1 \vdots 6$, тогда $S_1 = 2\cdot 3\cdot C$, $C \in \mathbb{Z}$, заметим, что $C > 3$, т.к. $S_1 \geq 100$, а иначе $S_1 \leq 2\cdot 3\cdot 3 < 100$. Значит S_1 можно представить в виде 3-ёх различных множителей.

№11.7.

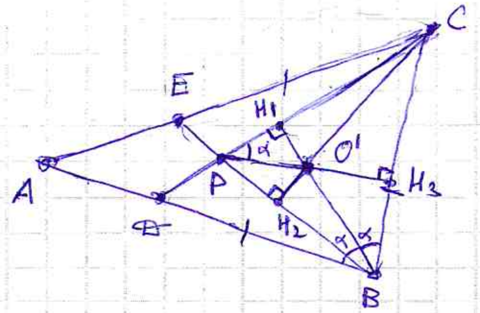
Докажем, что $x_i - x_{i+1} > 0$, $i \in \mathbb{N}$, тогда посл-ть убывает.

$x_i - x_{i+1} = 2^n(\sqrt[2^n]{a}-1) - 2^{n+1}(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1) = 2^n(\sqrt[2^n]{a} - 1 - 2\sqrt[2^{n+1}]{a} + 2) = 2^n(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1)^2$, т.к. $a \neq 1$, то $(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1)^2 > 0$, $2^n > 0$,

значит $x_i > x_{i+1}$.

6	7	8	9	10	Σ
+ск	0ск +ПЕ	+ск	−ПЕ 0ск 1ск	0ск 0ПЕ	~~21~~ 22
7ПЕ	7НА	7Б			

№ 11.8.



Дано: $\triangle ABC$; $D \in AB$; $E \in AC$;

$DB = BC = CE$; $BE \cap CD = P$;

w_1 – опис. около $\triangle BDP$;

w_2 – опис. около $\triangle CEP$;

$w_1 \cap w_2 = \{P; O\}$;

Д-ть: O – центр впис. окр. $\triangle ABC$

Доказательство:

1. Давайте отметим O' – центр вписанной окр. $\triangle ABC$. Тогда если мы докажем, что $O' \in w_1$ и $O' \in w_2$, мы решим задачу, т.к. тогда O' совпадёт с O, ведь ~~в~~ пересечении w_1 и w_2 не более 2-ух точек и одна из них P, тогда $O = O'$. Докажем, что $DPO'B$ и $EPO'C$ – вписанные.

2. Если O' – центр вписанной, тогда BH_1 – биссектриса $\angle ABC$. Тогда BH_1 – также высота к DC, т.к. $\triangle DBC$ – равнобедренный. Аналогично получаем, что CH_2 – высота к BE в $\triangle BCE$.

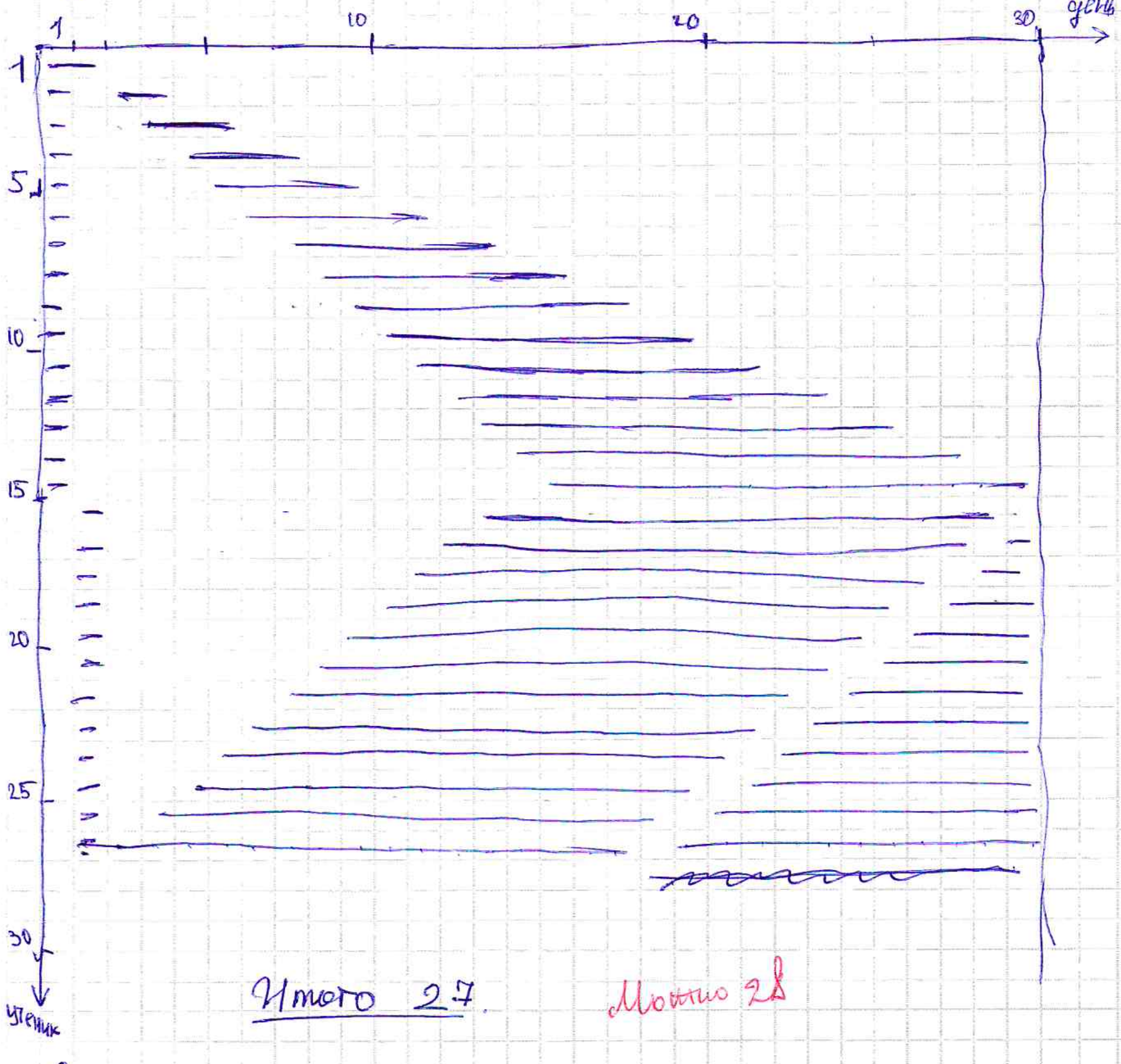
3. Т.о. O' – ортоцентр $\triangle BCP$. Тогда PH_3 – также высота. Отсюда из подобия $\triangle PH_1O' \sim BH_3O'$ по 2 углам следует равенство $\angle PH_1 = \angle O'BH_3 = \alpha$.

4. $\angle H_1PO' = \angle O'BH_3 = \angle O'BD = \alpha$, т.к. BO' – биссек. Тогда $DPO'B$ – вписанный, т.к. $\angle DPO' + \angle DBO' = 180° - \angle H_1PO' + \angle DBO' = 180°$

5. Аналогично доказываем, что $EPO'C$ – вписанный. Тогда O совпадает с O', что и требовалось.

№11.9.

Пример:



Итого 27.

Можно 28

Оценка:

~~Не~~ если есть ученика, который 30 раз, то он единственный в классе $m=1$.

Если учеников > 28, то ~~п~~ есть 1 и 29, ~~то~~ но тогда, всех остальных быть не может.

Нет. Если 29, то есть и 1, и 29.