Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

1	2	3	4	5	Σ
+Б 7 Хр	+ Хр 7Б	∓Б 1 НА	+ НА 7 ок	∓ НА 0 Хр	22

11 класс

Шифр 1-11-24

№1

Пусть ~~рыцари~~ 10 человек загадали числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 5, 5

1: $1 < 2 < 3$ - рыцарь
2: $2 < 3 < 4$ - рыцарь
3: $3 < 4 < 5$ - рыцарь
4: $4 < 5 < 6$ - рыцарь
5: $5 < 6 < 7$ - рыцарь
6: $6 < 7 < 8$ - рыцарь
7: $7 < 8 < 9$ - рыцарь
8: $8 < 9 < 10$ - рыцарь
9: $9 < 5 < 2$ - лжец
10: $10 < 5 < 1$ - лжец.

Т.е. возможно, чтобы 8 из 10 человек были рыцарями. Докажем, что это наибольшее возм. значение.

Предположим, что 10-й человек - рыцарь. Тогда наим. возможное число, которое он мог загадать: 11. Но ~~это~~ 11 больше чем любое число от 1 до 10. Это значит, что вторая фраза 10-го человека не может быть правдой одновременно с 1, т.е. 10 человек - лжец.
Аналогично для 9-го человека, наим. возм. число для него: 10, а 10 больше или равно всем числам 1...10, т.е. 9 человек - лжец.

Тогда больше 8 рыц. среди 10 чел. быть не может и 8 - наиб. возм. число.

Ответ: 8

№2

Пусть x_1 - один из ~~из~~ корней трехчлена x^2+ax+b, а x_2 - трехчлена $x^2+ax+b+1$

Тогда $\begin{cases} x_1^2+ax_1+b=0 \\ x_2^2+ax_2+b+1=0 \quad |\cdot(-1) \end{cases}$

По теореме Виета $-a$ - сумма корней обоих трехчленов, ~~т.е. $a \in Z$~~ а т.к. все корни - целые, то $a \in Z$

может каждого?

$\begin{cases} x_1^2+ax_1+b=0 \\ -x_2^2-ax_2-b=1 \end{cases}$

$x_1^2-x_2^2+a(x_1-x_2)=1$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+a(x_1-x_2)=1$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+a)=1$, т.к. $x_1 \in Z$, $x_2 \in Z$, а $a \in Z$, то

~~значит~~ $x_1-x_2 \in Z$ и $x_1+x_2+a \in Z$. Тогда или $x_1-x_2=x_1+x_2+a=1$, или $x_1-x_2=x_1+x_2+a=-1$

1) $\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ x_1+x_2+a=1 \end{cases}$; ~~$2x_1+a=2$~~

$x_1=x_2+1$; $2x_2+a+1=1$; $2x_2=-a$; $a=-2x_2$

2) $\begin{cases} x_1-x_2=-1 \\ x_1+x_2+a=-1 \end{cases}$; $x_1=x_2-1$; $2x_2+a-1=-1$; $2x_2=-a$; $a=-2x_2$

Подставим $a = -2x_2$ во 2-й трехчлен.

$x_2^2 - 2x_2^2 + b + 1 = 0$; $x_2^2 = b + 1$; $b = x_2^2 - 1$

Подставим $a = -2x_2$ и $b = x_2^2 - 1$ в $x^2 + ax + b + 2 = 0$

$x^2 - 2x_2 x + x_2^2 + 1 = 0$; $(x - x_2)^2 + 1 = 0$; $(x - x_2)^2 = -1$ — нет решений.

Т.е. при a и b, удовл. данным условиям, $x^2 + ax + b + 2 = 0$ не им. корней

Ч.т.д.

~~№5~~ №4

$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n$

$P_{n+1}(x) = x^{2n+2} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-2} + \ldots + a_n x^2 + a_{n+1} = x^2(x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + \ldots + a_n) + a_{n+1}$

$= x^2 P_n(x) + a_{n+1}$ +1

Тогда $P_{n+1}(0) = 0^2 \cdot P_n(0) + a_{n+1} = a_{n+1}$

$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2 \cdot P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = a_{n+1}^2 \cdot 0 + a_{n+1} = a_{n+1}$

$P_{n+1}(a_{n+2}) = 0$ (по опр.)

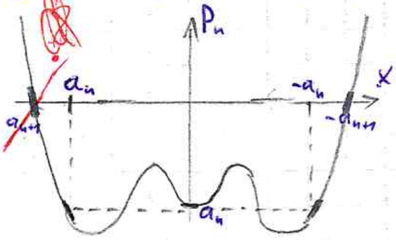
Т.к. $P_n(x)$ — четная ф-ия, а a_{n+1} — ее наим. корень, ~~то т.к.~~ +1

то $P_n(-a_{n+1}) = 0$, т.е. $-a_{n+1}$ — также корень $P_n(x)$. $a_{n+1} < -a_{n+1}$; $a_{n+1} < 0$

Значит, начиная с $N = 2019$, ~~$a_N < 0$, $P_N(0) = a_N$; $P_N(a_N) = a_N$; $P_N(a_{N+1}) = 0$~~

$a_n < 0$; $P_n(0) = a_n$; $P_n(a_n) = a_n$; $P_n(a_{n+1}) = 0$

Построим график $P_n(x)$



$\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = +\infty$, т.к. коэф. при стар. члене равен 1 +

a_{n+1} — наим. корень, значит для $x < a_{n+1}$ $P_n(x) > 0$

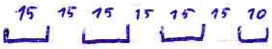
Также известно, что $P_n(a_n) = a_n$, где $a_n < 0$

Это возможно только при $x > a_{n+1}$, т.е.

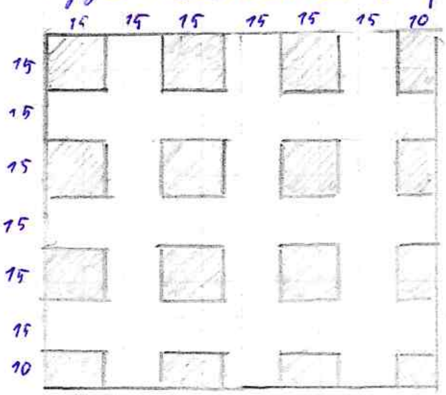
$a_{n+1} < a_n$. Тогда для всех $n \geq N = 2019$ $a_{n+1} < a_n$ + Ч.т.д.

№4 №3

Рассмотрим более простую задачу: на доске 1×100 (полоса шириной в 1 кл. и длиной в 100). Отмечая клетки по порядку, каждая, кроме посл. 15 клеток, „запрещает" отмечать одну из следующих. Наибольшей плотности отмеченных клеток там можно достичь если ~~каждая~~ каждая из них будет „запрещать" только 1 клетку впереди себя, а все предыдущ. клетки будут уже либо отмечены, либо „запрещ."

Таким образом можно получить схему: 15 отм. клеток, 15 пропущенных, 15 отмеч. и т.д. При этом для ~~т~~ длины досок, кратных 30, ожидаем заполнение 1:2. Т.к. каждые 15 клеток первых 90, отмеч. подоб. образом, остаются не отмеченными, возможно отметить все оставшиеся 10 клеток без пропусков. Таким образом, для доски 1×100 получ. заполнение , где отмечено 55 клеток

Вернемся к доске 100×100. ~~Заполнив 1 ряд предл. способом, все клетки 15~~ Считая один ряд, клетки которого отмечены подоб. образом, отмеченным, самым эффективным способом будет отмечать ряды в соотв. с этой же схемой, т.е почему самый эффективный



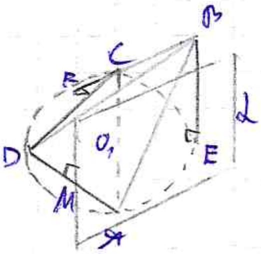
~~В этом~~ Отмечено $9\cdot15\cdot15+6\cdot10\cdot15+10\cdot10$ $=2025+900+100=3025$

Ответ: 3025

-6

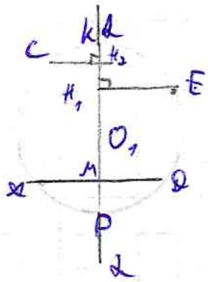
~~Да~~

№5



Дано: тетр. $ABCD$, $BE \perp (ACD)$, $CF \perp (ABD)$
$A, C, D, E \in$ окр. (O_1, R_1), $A, B, D, F \in$ окр. (O_2, R_2)
$\alpha \perp AD$, $\alpha \cap AD = M$, M - серед. AD
Доказать: $\rho(E, \alpha) = \rho(F, \alpha)$
Док-во:

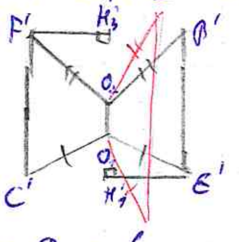
Рассм. окр. (O_1, R_1)



AD - хорда окр, PK - сеч. круга плоск. α.
т.к. $AD \perp PK$, ~~то~~, $AM = MD$, то PK - диам. и $O_1 \in PK$, $O_1 \in \alpha$, аналогично $O_2 \in \alpha$

I. $\alpha \perp AD$, зн. $\alpha \perp (ADB)$, $\alpha \perp (ACD)$, ~~зн.~~ $BE \perp (ACD)$, и $CF \perp (ABD)$,
знач. $BE \parallel \alpha$, $CF \parallel \alpha$

II. $O_1 O_2 \subset \alpha$, спроец. BE и CF на плоск, прох. через $O_1 O_2$ и парал. AD



$CO_1 = O_1E$ как рад, зн. $C'O_1 = O_1E'$, аналог. ~~$\emptyset$~~ $F'O_2 = B'O_2$
~~О~~ Плоск. проекци перп. α, т.к. она парал. AD,
зн. $C'F' \parallel B'E' \parallel O_1O_2$ и $O_1O_2F'C'$ и $O_1O_2B'E'$ - трапеции.
O_1O_2 - общ. стор, $O_1C' = O_1E'$, $O_2F' = O_2B'$, знач. $O_1O_2F'C' = O_1O_2B'E'$
Тогда высота $E'H_1' = F'H_3'$. ~~$E'H_1 \parallel \alpha$,~~ $E'H_1$ и $F'H_3'$ парал.
плоск. сеч, т.к. они перп. α. Тогда $EH_1 = FH_3 = E'H_1' = F'H_3$
~~перп.~~ парал. AD (кот. парал. плос. сеч)

ч.т.д.

НА

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

11 класс Шифр 2-11-09

6	7	8	9	10	Σ
+ 7	−+ 7	+ 7	0 0	− 1	22

№6

Пусть $100+a$ – первое число, где $a \in N$

Тогда ост. числа $101+a$, $102+a$, $103+a$

Если $a=2k$ (четное), то выберем все числа кроме первого

$101+a+102+a+103+a = 306+3a = 3(102+a) = 3\cdot(102+2k) = 3\cdot 2\cdot(51+k)$

Найдём числа: 2; 3; $51+k$

Если $a=2k+1$ (нечетн), то выб. все числа кроме последнего

$100+a+101+a+102+a = 303+3a = 3(101+a) = 3(102+2k) = 3\cdot 2\cdot(51+k)$

Числа: 2, 3, $51+k$

ч.т.д.

№7

$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right) = 2^n\sqrt[2^n]{a} - 2^n = 2^n a^{\frac{1}{2^n}} - 2^n = 2^n a^{2^{-n}} - 2^n$

$x_{n+1} = 2^{n+1} a^{2^{-n-1}} - 2^{n+1} = 2\cdot 2^n \sqrt{a^{2^{-n}}} - 2\cdot 2^n$

Найдем $x_{n+1}-x_n$

$x_{n+1}-x_n = 2\cdot 2^n\sqrt{a^{2^{-n}}} - 2\cdot 2^n - 2^n a^{2^{-n}} + 2^n = -2^n a^{2^{-n}} + 2\cdot 2^n\sqrt{a^{2^{-n}}} - 2^n =$

$= -2^n\left(a^{2^{-n}} - 2\sqrt{a^{2^{-n}}}+1\right) = -2^n\left(\left(\sqrt{a^{2^{-n}}}\right)^2 - 2\sqrt{a^{2^{-n}}}+1\right) = -2^n\left(\sqrt{a^{2^{-n}}}-1\right)^2$

$-2^n<0$ при любых n. Найдем, когда $\sqrt{a^{2^{-n}}}-1=0$:

$\sqrt{a^{2^{-n}}}=1$; $a^{2^{-n}}=1$; $a=1$ – не соотв. условию.

Знач. $\left(\sqrt{a^{2^{-n}}}-1\right)^2>0$, тогда $x_{n+1}-x_n<0$, значит $x_{n+1}<x_n$, т.е последов. $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ – убывает.

ч.т.д.

№10

Рассмотрим различные варианты игры на примере $n=4$

1) Все числа одинаковы и равны $\frac{1}{2n}$. У Васи нет выбора, число на доске $\frac{1}{4n^2}$ ($\frac{1}{8}\times 8$, произв. $\frac{1}{64}$)

2) Одно из чисел не равно остальным, обозн. его за x.
Тогда остальные числа $\frac{1-x}{2n-1}$.

Случай 2.1: $x > \frac{1-x}{2n-1}$. Тогда наиб. произв. ~~при~~ будет $x \cdot \frac{1-x}{2n-1} = \frac{x-x^2}{2n-1}$. Наиб. значение $f(x) = x - x^2$ на R — это $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, тогда наиб. пр. равно $\frac{1}{4(2n-1)} = \frac{1}{8n-4}$ $\left(\frac{1}{2}\times 1, \frac{1}{14}\times 7, \text{произв. } \frac{1}{28}\right)$

Случай 2.2: $x < \frac{1-x}{2n-1}$. Тогда наиб. произв. будет $\frac{(1-x)^2}{(2n-1)^2}$. Оно наиб. при $x=0$, т.е. оно равно $\frac{1}{4n^2-4n+1}$ $\left(0\times 1, \frac{1}{7}\times 7, \text{произв. } \frac{1}{49}\right)$

Сравним случаи $\frac{1}{8n-4}$ и $\frac{1}{4n^2-4n+1}$. $\frac{1}{8n-4} > \frac{1}{4n^2-4n+1}$ ~~при~~, когда $8n-4 < 4n^2-4n+1$; $4n^2-12n+5>0$, $n<0.5$ или $n>2,5$.

Таким образом, ~~для~~ случай 1 лучше для Пети при $n \geq 3$, а для $n=2$ получаем $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{9}$ соответственно.

3) Два числа отличаются от остальных (x и y).

1. В случае, если оба числа больше остальных, то Петя не получает преимущества над вариантом 2.1, т.к. Вася при правильной игре не располож. их рядом.

2. В случае, если оба числа меньше остальных, то оптим. случ. является $x=y=0$. ~~Для~~ Тогда остальные числа $\frac{1}{2n-2}$ ~~для $n\geq$~~. Для $n \geq 3$ произв. будет $\frac{1}{(2n-2)^2} = \frac{1}{4n^2-8n+4}$; для $n=2$ возможна расстановка $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$, дающая 0 $\left(0\times 2, \frac{1}{6}\times 6\right)$

3. Пусть одно из чисел меньше остальных (y), тогда числами будут: $x\times 1$, $y \times 1$, $\frac{1-x-y}{2n-2}\times 2n-2$, а наиб. произв. $x\frac{1-x-y}{2n-2}$. ~~Оно наиб. при~~ $= \frac{x-x^2-xy}{2n-2}$, оно наиб. при $y=0$, $x=\frac{1}{2}$, тогда наиб. произв. $\frac{1}{8n-8}$, что больше случая 2.2 для всех ~~n~~ n. Сравним случаи 3.2 и 3.3:

$\frac{1}{4n^2-8n+4} \geq \frac{1}{8n-8}$ ~~n~~, когда $4n^2-8n+4 \leq 8n-8$, $4n^2-16n+12 \leq 0$; $0,5 < n < 3$, т.е.

для $n \geq 3$ случай 3.3 не хуже 3.2 $\left(0\times 1, \frac{1}{2}\times 1, \frac{1}{12}\times 6\right)$

4) Одно из чисел (x) больше остальных (a), присутствуют два 0.

Возможно расположение $\ldots - a - 0 - x - 0 - a - \ldots$, дающее произведение a^2, что заведомо меньше случая 1.1

5) $n-1$ нулей, остальные числа равны

Тогда остальные числа равны $\frac{n}{2n-n+1}=\frac{1}{n+1}$, а произведение: $\frac{1}{(n+1)^2}$. Сравним с 3.3:

$\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{8n-8}$, когда $n^2+2n+1 < 8n-8$; $n^2-6n+9<0$; $(n-3)^2<0$ – ни при каких n.

4) Другие комбинации 0 и чисел, больших остальных, не ~~превосход~~ лучше для

Теми, чем случай 3.3, т.к. при наличии m нулей возможно "блокировать"

$m-1$ наибольших чисел. Наилучшим вариантом здесь будет

уравнивание ~~всех чисел, больше остальн.~~ наибольших m

чисел, (X-сумма наиб. m чисел) тогда получим расстановку $0 \times m$, $\frac{X}{m} \times m$, $\frac{1-X}{2n-2m} \times (2n-2m)$, и наиб.

произв. будет явл. $\frac{X}{m} \cdot \frac{1-X}{2(n-m)} = \cancel{2(n-m)X=}\ \frac{X-X^2}{2m(n-m)}$, что явл. наиб при

$X=\frac{1}{2}$, тогда оно равно $\frac{1}{8m(n-m)}$ ~~, что~~ $=\frac{1}{8mn-8m}$, что менее $\frac{1}{8n-8}$ при $m>1$

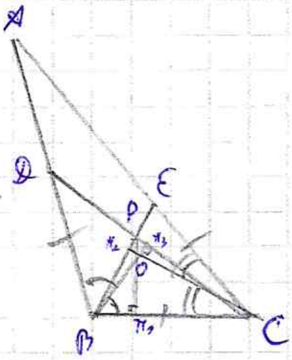
Таким образом, при $n=2$ наиб. возм. произв. является $\frac{1}{9}$ (пункт 2),

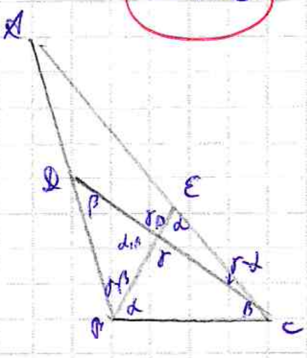
а для $n \geq 3$ им явл. $\frac{1}{8n-8}$ (случай 3.3)

Ответ: $\begin{cases} \frac{1}{9}, & n=2 \\ \frac{1}{8n-8}, & n \geq 3 \end{cases}$ $\frac{1}{8}$

№ 8 +

Дано: $\triangle ABC$, $D \in AB$, $E \in AC$
$DB = BC = CE$, $BE \cap CD = P$
Доказать: опис. вокруг $\triangle BPD$ и $\triangle CPE$ окр. перес. в точке O – цен. впис. окр. $\triangle ABC$.





$\alpha+\beta+\gamma=180°$
$\angle CEB = \angle CBE = \alpha$
$\angle CDB = \angle DCB = \beta$
$\angle BPC = \gamma = \angle EPD$
$\angle BPD = \alpha+\beta = \angle EPC$
$\angle PBD = \gamma-\beta$, $\angle PCE = \gamma-\alpha$
$\angle ABC = \alpha+\gamma-\beta$, $\angle ACB = \beta+\gamma-\alpha$

биссектриса

$\angle OBC = \frac{\gamma-\beta+\alpha}{2}$??? Откуда?

$\angle POB = \angle OH_1B + \angle OBC = 90° + \frac{\gamma-\beta+\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\gamma-\beta+\alpha}{2} = \alpha+\gamma$

$\angle POB + \angle CDB = \alpha+\gamma+\beta = 180°$, зн. ~~B, D, P, O – леж. на одн. окр.~~ вокруг BDPO можно опис. окр., т.е O лет. на окр, опис. вокруг $\triangle BDP$

аналогично для OPEC, зн. O – т. перес. опис. окр. вокруг $\triangle BPD$ и $\triangle EPC$

ч.т.д.

Зачем?

$\triangle CBD$ и $\triangle CEB$ – равнобед, поэтому: их ~~высоты~~ бисс. явл. медианами и высотами O – ~~т.~~ центр впис. окр. и т. перес. бисс., $PH_1 \perp BC$; почему?

$O \in PH_1$, т.к. все высоты ($\triangle PBC$) перес. в одной точке, а $BH_3 \cap CH_2 = O$

(т.к. CH_2 – бисс $\angle ACB$, а BH_3 – бисс. $\angle ABC$)