Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 1-9-02

№ 9.1

	1	2	3	4	5	Σ
К.Р.	+	+	+	0	−	
	7	7	7	0	0	21

Пусть $f(x)=x^2+ax+b$

$g(x)=x^2+cx+d$

Тогда из условия:

1) $f(1)=g(2)$

$1^2+a\cdot 1+b=2^2+c\cdot 2+d$

$1+a+b=4+2c+d$

$\boxed{b-d=3+2c-a \quad (1)}$

2) $f(2)=g(1)$

$2^2+a\cdot 2+b=1^2+c\cdot 1+d$

$4+2a+b=1+c+d$

$\boxed{b-d=-2a+c-3 \quad (2)}$

3) из (1) и (2) следует:

$b-d=b-d$

$3+2c-a=-2a+c-3$

$\boxed{6=-a-c}$

4) По теореме Виета сумма корней $f(x)$ и сумма корней $g(x)$:

$S=x_1+x_2+x_3+x_4=(-a)+(-c)=6$

Ответ: 6.

№9.2

1) Заметим, что число рыцарей не могло быть 10, ведь тогда все сказали правду и тогда все числа больше 1 (1-ое высказывание) и одновременно есть число, которое меньше 1. Такого быть не может.

2) Аналогично не могло быть 9 рыцарей, ведь тогда точно есть число больше 1, и есть число меньше 2 (об этом говорят высказывания „моё число меньше 2" и „моё число меньше 1"). Но все числа целые. Значит такого быть не могло.

3) Значит рыцарей не более 8.

Вот пример на 8 рыцарей:

№ человека	задуманное число	1-ое высказывание	2-ое высказывание	кто?
1	2	>1	<3	Р
2	3	>2	<4	Р
3	4	>3	<5	Р
4	5	>4	<6	Р
5	6	>5	<7	Р
6	7	>6	<8	Р
7	8	>7	<9	Р
8	9	>8	<10	Р
9	8	>9	<2	Л
10	9	>10	<1	Л

Ответ: 8.

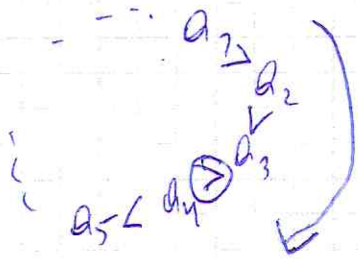
№9.3

0) Так как все числа различны, то есть среди них минимальное. Рассмотрим его:

Пусть число A - минимально. Пусть при делении A на B получаем остаток q_1. Но раз $B > A$, то $\boxed{A = q_1}$

Значит минимальное число - равно одному из остатков.

1) Назовём число „хорошим", если оно меньше своего соседа, если идти по часовой стрелке. Например:



~~число~~

число a_3 - „хорошее"

$(a_3 < a_4)$

• Заметим, что „хорошее" число равно одному из остатков Васи, так как оно меньше последующего, а при делении на него даёт один из остатков Васи.

$A \equiv_B q$, $A < B$

$\Downarrow$

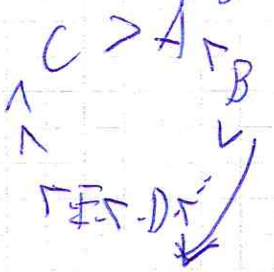
$\boxed{A = q}$

• Значит „хороших" чисел не более 2-ух, так как остатков у Васи всего 2.

• Также заметим, что минимальное число среди всех также является „хорошим".

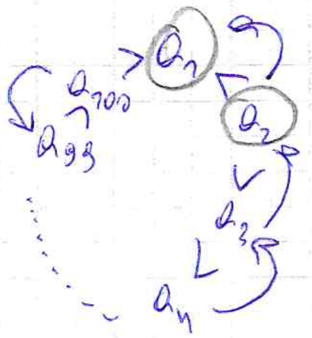
1) Пусть „хорошее" число всего одно — минимальное среди всех. Если такое невозможно, то мы уже победили, ~~так~~ пусть возможно:

Тогда числа идут в



порядке ~~возрастания~~ начиная от B и заканчивая A (по часовой стрелке)

Тогда, если идти против часовой стрелки, то при деление меньшего на большее будем получать остаток — само число (меньшее число). Так как все числа различные, то и остатки различные. Значит остаётся рассмотреть деление числа a_2 на a_1:



Так как число $a_1 = q_1$ одному из остатков, то при деление a_2 на a_1 получим число от 0 до $q_1 - 1$ $[0 \text{ до } q_1 - 1]$.

$a_{100} > a_1 = q_1$

⇕

$a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_{99} > a_{100} > a_1 = q_1$

Но есть это число меньше всех чисел от a_1 до a_{100}, а значит ~~на~~ право и меньше всех других остатков. Или другими словами, при деление a_2 на a_1 получим наименьший, а значит и другой остаток.

2) ~~„хороших"~~ „хороших" чисел ровно 2.
Пусть минимальное число — остаток q_1

$A \underset{q_1}{\equiv} q_2$

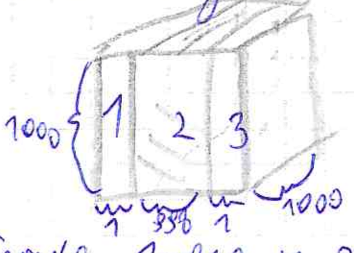
• при делении A на q_1 получается ~~минимальное~~ остаток, меньший q_1. Значит это остаток q_2. Но мы предположили, что число q_1 — минимальное, а получается, что $q_2 < q_1$.

Значит „хороших" чисел не может быть ровно 2. Так как иначе второе „хорошее" число — q_2, и тогда оно минимальное. почему q_2 тоже число на круге?

3) Вывод: „хороших" чисел только одно. Числа идут в порядке возрастания, значит все остатки различны.

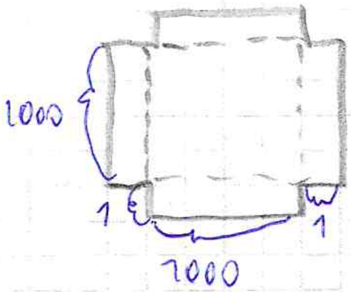
№ 9.5

Разобьём куб на 3 участка:

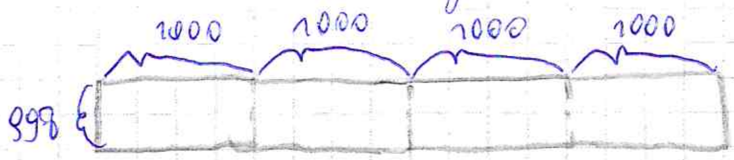


1-ый и 3-ий участок идентичны.

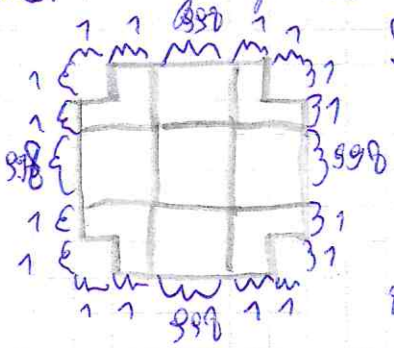
а) Развёртка 1-го и 3-го участков:



б) Развёртка 2-го участка:



д*) Оценим максимальное возможное число клеток, которые можно закрасить на 1-ом участке (или 3-ем)



Разобьём эту фигуру на уголки (⊞) и квадраты (⊞) 2×2.

о) Очевидно, что в квадрате 2×2 (⊞) нельзя закрасить более 2-ух клеток, иначе будут обязательно клетки, имеющие общую сторону, и при этом закрашенные. (⊞)

о*) Очевидно, что в выделенном 4-ёх уголке нельзя закрасить более 1-ой клетки:

Ведь на самом деле A и C – соседние клетки, а раз все 3 клетки A, B, C соседние, то закрасить можно не более одной.

1) Тогда можно посчитать, сколько клеток максимально можно покрасить:

всего клеток; клеток „уголков" (⊞)

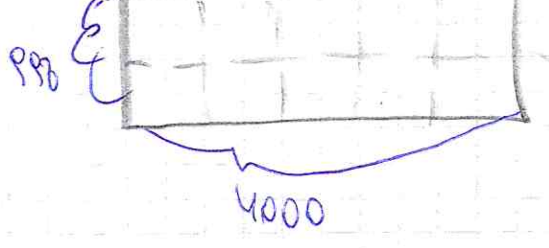
$$S_1 = \underline{1000^2 + 4\cdot 1000 - 4\cdot 3} = \frac{1000^2}{4} + 1000 - 3 = 500^2 + 997$$ – число квадратов (⊞) 2×2

$$t_1 = S_1\cdot 2 + 4\cdot 1 = (500^2+997)\cdot 2 + 4\cdot 1 = 500^2\cdot 2 + 1998$$

число закрашенных клеток в уголках (⊞)

число закрашенных клеток в квадратах 2×2 (⊞)

д*) Теперь рассмотрим 2-ой участок.



Разобьём на квадраты 2×2, тогда

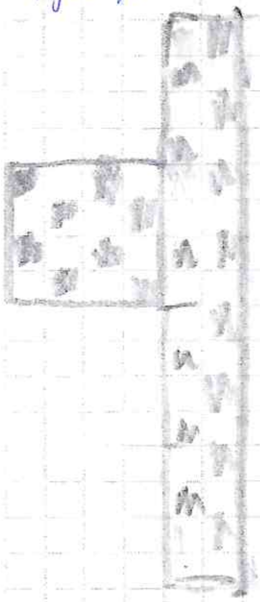
$$S_2 = \frac{998\cdot 4000}{4} = 998000$$

$$t_2 = S_2\cdot 2 = 998000\cdot 2 = 1996\cdot 10^3$$

Тогда в итоге:

$t = 2\cdot t_1 + t_2 = 2\cdot(500^2\cdot 2 + 1998) + 1996\cdot 10^3 = 1000^2 + 3996 +$
$+ 1996\cdot 10^3 = 2996\cdot 10^3 + 3996 = 2996000 + 3996 =$
$= 2{,}999{,}996 = 3\cdot 10^6 - 4$ (вроде правильно посчитал)

Пример:



их нельзя независимо раскрасить.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

6	7	8	9	10
А.Ш. +	−	+	0	∓
7 к.р.	0 к.р.	7 ш	0 ш	2 ш

___ класс

Шифр 2-9-01

~~№3.6~~

~~0) Пусть даны 4 числа:~~
~~n $(n+1)$ $(n+2)$ $(n+3)$, $n > 100$.~~

~~Пусть $n \underset{6}{\equiv} q$, то n при делении на 6 даёт остаток q, тогда:~~
~~$n \underset{6}{\equiv} q$~~
~~$(n+1) \underset{6}{\equiv} q+1$~~
~~$(n+2) \underset{6}{\equiv} q+2$~~
~~$(n+3) \underset{6}{\equiv} q+3$~~

~~1) пусть $q \vdots 2$, тогда, если лежит 2-ое, 3-ие, 4-ое числа:~~

№3.6

Пусть даны 4 числа:
n $(n+1)$ $(n+2)$ $(n+3)$, $n > 100$

Рассмотрим 2 случая:
1) $n \vdots 2$, тогда
$(n+1)+(n+2)+(n+3) = 3n+6 = 3(n+2) \vdots 6$
То есть сумма этих 3 чисел делится на 2 и на 3.
2) $n \not\vdots 2$, тогда
$n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1) \vdots 6$
То есть сумма этих 3 чисел делится на 2 и на 3.
3) Теперь мы умеем выбирать 3 числа, так чтобы их сумма делилась на 6, тогда пусть полученная сумма S.
Верно, что $S > 300$ и $S \vdots 6$, тогда можно заметить:

/1

$S = 2 \cdot 3 \cdot K$, где K — (3-ий) множитель числа.

Так как $S \geq 300$, то $K > \frac{300}{6} = 50$

То есть можно выбрать 3 числа так, чтобы их сумма представлялась в виде произведения 3-ёх чисел, больших 1.

+

№9.8

Дано:

$\triangle ABC$

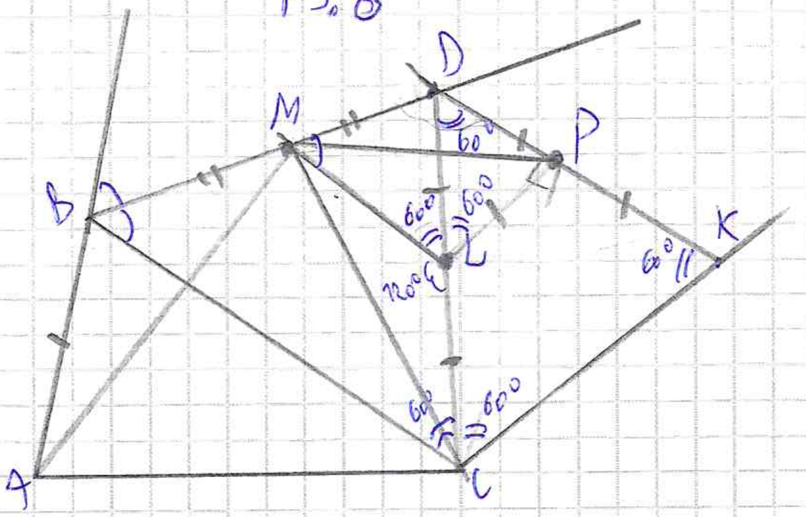
$\angle BCD = 60°$

$CD = 2AB$

$BM = MD$

Доказать:

$\triangle AMC$ — равноб.



1) Пусть L — середина DC: $DL = LC$

2) ML — средняя линия $\triangle BDC$ ($BM = MD$ и $DL = LC$)

$\Downarrow$

$\boxed{\angle DML = \angle DBC}$

3) отложим угол $\angle DCK$: $\angle DCK = 60°$, $CK = DC$

4) $\triangle CDK$: $\angle DCK = 60°$, $DC = CK$

$\Downarrow$

$\triangle CDK$ равноб.

$\Downarrow$

$\angle CDK = \angle CKD = 60°$

$\Downarrow$

$\boxed{\triangle CDK \text{ — равносторонний}}$

5) Пусть P — середина DK: $DP = PK$

$\Downarrow$

$\boxed{LP \text{ — средняя линия } \triangle CDK}$

6) $\angle DLP = \angle DCK = 60^\circ$, так как LP – средняя линия $\triangle CDK$

7) $\angle MLD = \angle BCD = 60^\circ$, так как ML – средняя линия $\triangle BDC$

8) $\angle MLP = \angle MLD + \angle DLP = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

9) $LP = DL = DP$, так как $\triangle LDP$ – равносторонний

$\Downarrow$

$\boxed{LP = LC}$

10) $\triangle MLC = \triangle MPL$

$\left(\begin{array}{l} \angle MLP = \angle MLC = 120^\circ \\ LC = LP \\ ML \text{ – общая сторона} \end{array}\right)$

$\Downarrow$

$\boxed{MC = MP}$

~~11) $\angle BCD = \angle CDK = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel DK$~~

11) $\triangle BDC$: $\angle MDC = 180^\circ - \angle BCD - \angle DBC = 180^\circ - 60^\circ - \angle DBC = 120^\circ - \angle DBC$.

$\triangle MDP$: $\angle MDP = \angle MDC + \angle CDK = 120^\circ - \angle DBC + 60^\circ = 180^\circ - \angle DBC$

$\Downarrow$

$\boxed{\angle ABM = \angle MDP}$

12) $\triangle ABM = \triangle PDM$

$\left(\begin{array}{l} AB = DP \\ BM = MD \\ \angle ABM = \angle MDP \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{AM = MP}$

/3

В) $MC = MP$, $AM = MP$

$\Downarrow$

$MC = AM$

$\Downarrow$

$\triangle AMC$ — равнобедренный

+

№ 9.10

1) Заметим, что если на доске оказалось $2n$ чисел, то лучшая стратегия Васи — расположить их в порядке неубывания и перемножать крайние:

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{2n-1} \quad x_{2n}$, то есть x_i и x_{2n-i+1}

Тогда он получит:

$x_1 \cdot x_{2n}$, $x_2 \cdot x_{2n-1}$ ... $x_i \cdot x_{2n-i+1}$

Докажем это методом математической индукции.

База: $n=1$, всего 2 числа. Очевидно, что только один ответ:

$x_1 \cdot x_2$

И.П.: пусть для $2n$ чисел нужно числа, расположенные в порядке неубывания, перемножать крайние.

Докажем для $(2n+2)$-ух чисел.

Очевидно, что если максимальное умножить не на минимальное число, то полученное число не меньше того, а может и больше. Если такое же — то как без разницы, числа одинаковые, мы победили. Если $max \cdot a$, где $a > min$, то это уже не лучший вариант, так как можно лучше: $min \cdot max < max \cdot a$

и что?

почему не может что-то нарушиться в другом месте?

6

2) Пусть расположены в порядке невозрастания числа:

$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_{99} \geq x_{100}$

Заметим, что $x_i \cdot x_j$, где $i < j$, $x_i \geq x_j$

$x_i \cdot x_j \leq \left(\frac{1}{51}\right)^2$

Докажем это. Пусть

$x_i \cdot x_j > \left(\frac{1}{51}\right)^2$

$\Downarrow$

$x_i > \frac{1}{51}$, так как $x_i \geq x_j$

Значит $x_1 + x_2 + \ldots + x_i > i \cdot \frac{1}{51}$

И при этом $x_1 + x_2 + \ldots + x_i \leq 1$

$\Downarrow$

$i \leq 51$

$x_j \leq \frac{1}{51}$

Значит $x_1 + x_2 + \ldots + x_j \leq \frac{1}{51} \cdot j$

И при этом $x_1 + x_2 + \ldots + x_j \leq 1$

$\Downarrow$

$\frac{1}{51} \cdot j - 1 \geq 0$

$\frac{1}{51} \cdot j \geq 1$

$\Downarrow$

$j \geq 51$

~~до~~ $i < j$

2) Пусть какое-то произведение ab – максимально, $a \geq b$

① ② ③

$\dots a \dots \quad b \; a$

тогда в группе ① – числа не менее a

в группе ② – числа не менее b

в группе ③ – числа не менее 0.

почему лучший?

Тогда лучший вариант, очевидно, когда a и b – подряд, то есть в группе ① – только a, в группе ② – только b, в группе ③ – только 0, иначе a или b будут меньше – уже не лучший вариант!

$\overbrace{a \dots a}^{n}\, a\, \overbrace{b \dots b}^{100-2n-2}\, b\, \overbrace{0 \dots 0}^{n}$, $n \leq 50$, $n \geq 0$

почему в ① и ② одинаковое число цифр?

$na + a + (100-2n-1)b = 1$

$f(n,b) = a = \frac{1-99b+2nb}{n+1}$

$f(n,b) = ab(n,b) = \frac{1-99b+2nb}{n+1}\, b$

$\cancel{f'_n} = \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{2b(n+1) - (1-99b+2nb)}{(n+1)^2}\, b$

Найдём максимум функции с помощью ~~n~~ производной

~~ab fn~~

по n': ~~$ab\,(1-2\cdot 99b+4nb)$~~ $\frac{2b^2-1}{(n+1)^2} \to 0$? ~~$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

$\frac{101b-1}{(n+1)^2}\cdot b$

по b': $1 - 99\cdot 2b + 4nb \to 0$

$1 - 99\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot n\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

глобальный максимум не обязан достигаться в точке, где обе вторые произв. $= 0$.

$n \to 49$, так как n – натуральное

~~$n \to 48$, так как n – целое~~

~~$n = 48$~~

$n = 49$

он может быть на границе области

$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{n+1}(1 - 99\cdot 2b + 4nb)$

5

Последний лист

2-9-01

3) ~~Тогда~~ задача такая: $n=49$:

$\overbrace{a \ldots a}^{49}\ a\ b\ \overbrace{0 \ldots 0}^{49}$

$50a+b=1$, $b \geq a$

a) Пусть $a=b=\frac{1}{51}$, тогда $f(a,b)=\left(\frac{1}{51}\right)^2$

б) Пусть $b=\frac{1}{51}-\Delta k$, $a=\frac{1-b}{50}=\frac{1-\frac{1}{51}+\Delta k}{50}$, $\Delta k \geq 0$

$$a\cdot b=\left(\frac{1}{51}-\Delta k\right)\cdot\frac{\frac{50}{51}+\Delta k}{50}=\left(\frac{1}{51}-\Delta k\right)\cdot\left(\frac{1}{51}+\frac{\Delta k}{50}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{51}\right)^2+\frac{\Delta k}{50\cdot 51}-\frac{\Delta k}{51}-\frac{\Delta k^2}{50}=\left(\frac{1}{51}\right)^2-\frac{49\Delta k}{50\cdot 51}-\frac{\Delta k^2}{50}\leq\left(\frac{1}{51}\right)^2$$

Значит выражение может не больше $\left(\frac{1}{51}\right)^2$

Вот пример:

$\overbrace{\frac{1}{51}\ \frac{1}{51}\ \ldots\ \frac{1}{51}}^{51}\ \overbrace{0 \ldots 0}^{49}$

Ответ: $\left(\frac{1}{51}\right)^2$.

№ 9.7

Пусть прямоугольники — вершины, ребра — прямоугольники A и B имеют одинаковую вершину. Тогда противоречие того, что степень каждой вершины $12=3\cdot 4$. А это возможно только при образовании циклов. А это невозможно, так как нельзя, чтобы какие-то два прямоугольника имели 4 общие вершины. Это следует из теоремы графов, по сути.

/6