Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 1-9-04.

	1	2	3	4	5	Σ
к.р.	+	+	+	−	−.	
	7	7	7	0	1	22

№1.

$f(x) = x^2 + ax + b$

$g(x) = x^2 + cx + d$

Есть корни $\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = -a \\ x_3 + x_4 = -c \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(a+c)$

$f(1) = g(2)$ $\qquad$ $g(1) = f(2)$

$1 + a + b = 4 + 2c + d$ $\qquad$ $1 + c + d = 4 + 2a + b$

Сложим равенства:

$2 + a + \cancel{b} + c + \cancel{d} = 8 + 2c + \cancel{d} + 2a + \cancel{b}$

$a + c = -6 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

Ответ: 6

№2.

Рассмотрим того, кто сказал „< 1". Если это правда, то его число max = 0, и тогда он не мог сказать I фразу верно ⇒ тот, кто сказал „< 1" – лжец.

Теперь рассмотрим того, кто сказал „< 2". Аналогично, если это правда, то его число max = 1, и тогда он также не мог сказать I фразу верно (фразы начинаются с „> 1" ⇒ min число = 2) ⇒ тот, кто сказал „< 2" – также лжец

Таким образом, минимум 2 ч-ка – лжецы ⇒ 8 ч-к – рыцари. Пример для такого случая:

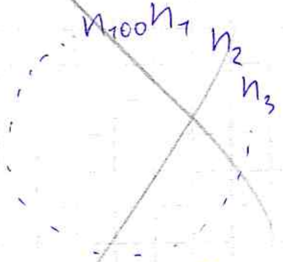
	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л
число	2	3	4	5	6	7	8	9	5	5
I фраза	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10
II фраза	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1	<2

⇒ это возможно

Ответ: 8 рыцарей.

№3.

Пронумеруем числа по кругу по часовой стрелке:



Тогда для Васи:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_2 p_2 + r_2 \\ n_2 &= n_3 p_3 + r_3 \\ &\dots \\ + \quad n_{100} &= n_1 p_1 + r_1 \end{aligned}$$

, где $r_1 \dots r_{100}$ — только 2 разных значения

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{100} = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \dots + n_{100} p_{100} + r_1 + \dots + r_{100}$$

$$0 = n_1(p_1 - 1) + n_2(p_2 - 1) + \dots + n_{100}(p_{100} - 1) + r_1 + \dots + r_{100} \quad (*)$$

Все ~~—~~ слагаемые в правой части не могут быть равны 0 одновременно (тогда бы $r_1 = r_2 = \dots = r_{100} = 0$ — только 1 значение) => какие-то слагаемые < 0.

~~Все $n \in N$ $r \in N$ =>~~ Все $n \in N$, $r \in N$ или 0, $p \in N$ или 0 => => какие-то $p = 0$.

~~Все $N \in$~~

Пусть $p_i = 0$ и $p_j = 0$, $i \neq j$

Тогда $r_i = n_{i-1}$ и $r_j = n_{j-1}$, $r_i \neq r_j$ => остатки принимают значения только n_{i-1} и n_{j-1} ($r_i \neq r_j$, т.к. все числа по условию различны) => в равенстве (*) взаимоуничтожаются слагаемые $n_i(p_i - 1) = -n_i$ и

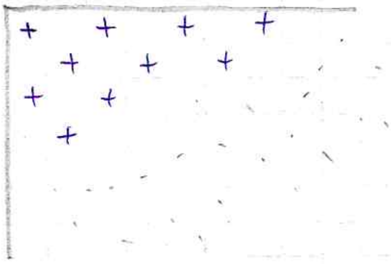
Рассмотрим минимальное число (по условию такое всегда есть). Т.к. оно минимально, то Вася поделил его

на большее число => в остатке получится всегда минимальное число. Значит, один из остатков - всегда минимальное число.
Пусть в каком-то месте круга Вася ещё раз делит меньшее число на большее => второй ~~возможный~~ остаток - меньшее число в данной паре > остаток 1 (т.к. число в данной паре не минимально). Теперь рассмотрим пару, где какое-либо число Вася делит на минимальное. Получившийся остаток < минимальное число = остаток 1. Таким образом, остаток 1 < остаток 2 < остаток 1 => такая ситуация невозможна => => Вася не может делить меньше число на большее более 1 раза => числа по кругу расположены в порядке возрастания, не считая места, где рядом стоят max и min числа.
Числа в порядке возрастания => когда делит Петя, он всегда делит меньшее на большее => его остатки равны числам, стоящим по кругу. Они по условию различны => остатки Пети различны.
Единственный раз, когда Петя делит большее число на меньшее - когда он делит max на min, но этот остаток < min число => он также не совпадает ни с одним другим.

№5.

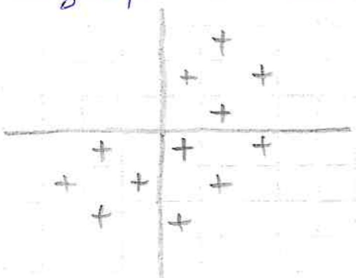
I. Рассмотрим клетчатую плоскость.
Разобьём её на доминошки 1×2. В каждой такой доминошке может быть закрашена только одна клетка так,

чтобы никакие 2 закрашенные клетки не имели общей стороны => общее кол-во закрашенных клеток на поле $2n \times 2n$ $\leq$ половины, т.к. такое поле можно разрезать на целое кол-во доминошек 1×2. Ровно половина будет тогда, когда раскраска будет такой:



II. Куб состоит из 6 граней 1000×1000, на каждой грани может быть закрашено максимум половина клеток. Но у куба соприкасаются 3 грани: 

Развёртка части куба:

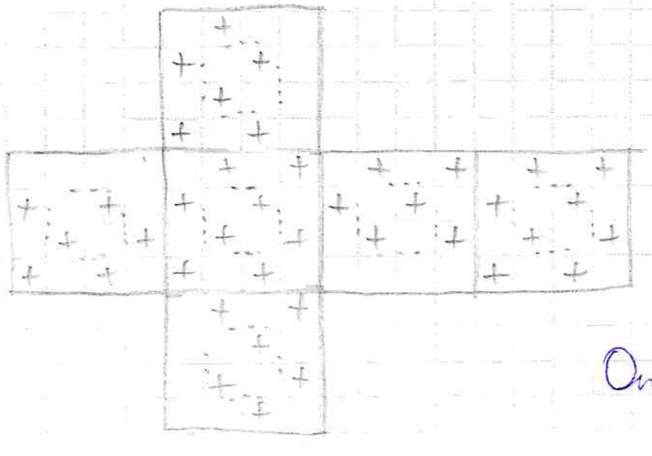


Если располагать закрашенные клетки как на плоскости, то в любом случае при соединении какие-то клетки закрашенные окажутся рядом =>

=> один из краёв нужно оставить незакрашенным

голословно

Полная развёртка:



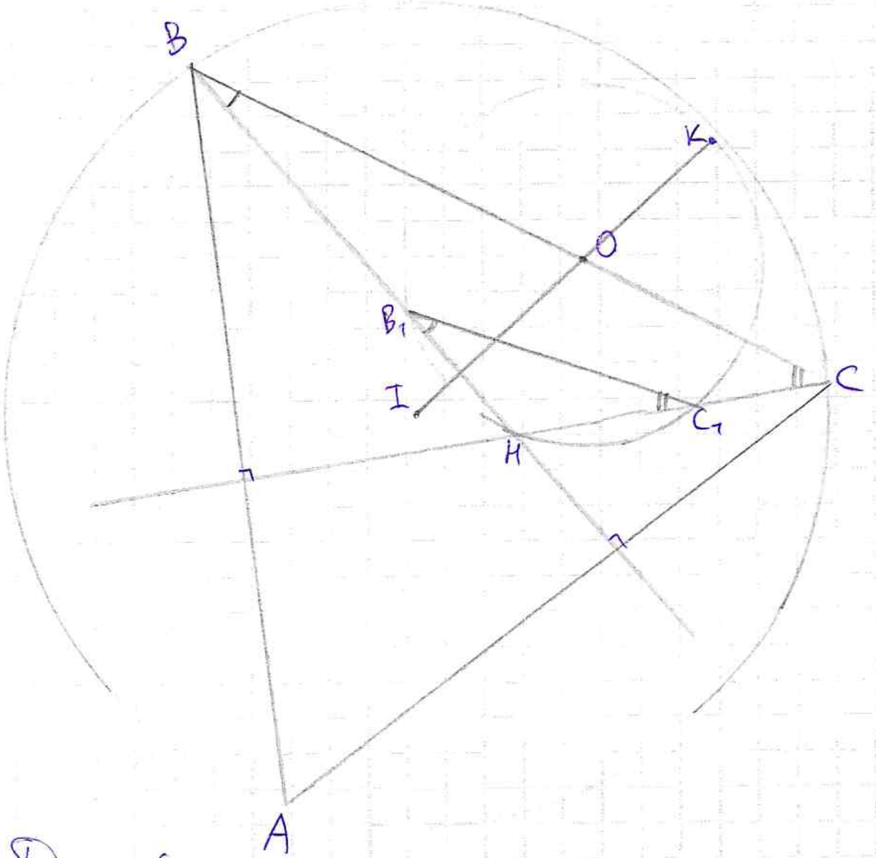
Для $1000 \times 1000 \times 1000$:

$$\frac{1000^2 \cdot \cancel{6}^{3} - \cancel{4}^{2} \cdot 1000}{\cancel{2}} =$$

$$= 1000(3000-2) = 2998000$$ клеток

Ответ: 2998000 клеток

№4.



Дано:

$B_1C_1 \parallel BC$

H – т. $\cap$ высот

ω – опис. около $\triangle B_1HC_1$

Γ – опис. около $\triangle ABC$

Док-ть:

Γ касается ω

Док-во:

I – центр Γ $\quad$ K – пересечение IO с ω

O – центр ω

Для утверждения задачи достаточно док-ть, что $IK =$
$= R$, R – радиус Γ ?

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс   Шифр 2-9-04

~~№1.~~

~~Пусть числа равны x, $x+1$, $x+2$, $x+3$.~~
~~Тогда их суммы (по 3 числа) – $3x+3$, $3x+4$, $3x+5$, $3x+6$ – 4 последовательных числа. Среди них всегда есть 2 чётных числа, и 1 или 2 числа $\vdots 3$.~~
~~Пронумеруем суммы от 1 до 4 в порядке возрастания.~~

	6	7	8	9	10	Σ
ин	+	+	0	—	—	
	7	7	0	0	0	14

к.р. к.р. к.р. АШ

№6.

Пусть числа равны x, $x+1$, $x+2$, $x+3$.
Среди этих 4 последовательных чисел всегда есть 2 числа $\vdots 2$ и 1 или 2 числа $\vdots 3$.
Значит, всегда можно получить сумму из 3-х чисел $\vdots 2$, нужно взять 2 нечётных и 1 чётное число.
Пронумеруем числа от 1 до 4 в порядке возрастания.

1) Пусть число $\vdots 3$ – нечётное (хотя бы одно).

Тогда, если это число 1: $\underset{\text{Н}}{3k} + \underset{\text{Н}}{3k+2} + \underset{\text{Ч}}{3k+1} \vdots 3, 2$

номер числа: 1, 3, 2

Н – нечётное, Ч – чётное

число 2: $\underset{\text{Н}}{3k} + \underset{\text{Н}}{3k+2} + \underset{\text{Ч}}{3k+1} \vdots 3, 2$

номер числа: 2, 4, 3

число 3: $\underset{\text{Н}}{3k} + \underset{\text{Н}}{3k-2} + \underset{\text{Ч}}{3k-1} \vdots 3, 2$

номер числа: 3, 1, 2

$$\begin{array}{lcccc} \text{число 4:} & 3k & +\,3k-2 & +\,3k-1 & \vdots\, 3,2\\ & Н & Н & Ч & \\ \text{номер числа} & 4 & 2 & 3 & \end{array}$$

2) Пусть число, $\vdots 3$, чётное (хотя бы одно)

Тогда, если это число 1:

$$\begin{array}{lcccc} & 3k_1 & +\,3k+1 & +\,3k+2 & \vdots\, 3,2\\ & Н & Н & Ч & \\ \text{номер числа} & 4 & 2 & 3 & \end{array}$$

↓

чтобы Σ была Ч (чётной)

$$\begin{array}{lcccc} \text{число 2:} & 3k & +\,3k-1 & +\,3k+1 & \vdots\, 3,2\\ & Ч & Н & Н & \\ \text{номер числа} & 2 & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} \text{число 3:} & 3k & +\,3k-1 & +\,3k+1 & \vdots\, 3,2\\ & Ч & Н & Н & \\ \text{номер числа} & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

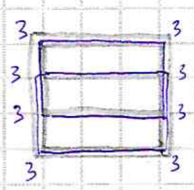
$$\begin{array}{lcccc} \text{число 4:} & 3k_1 & +\,3k-2 & +\,3k-1 & \vdots\, 3,2\\ & Н & Ч & Н & \\ \text{номер числа} & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

Таким образом, всегда одна из сумм $\vdots 6$. Т.к. все числа > 100, то третий сомножитель всегда будет > 6 => все 3 числа в произведении будут различны.

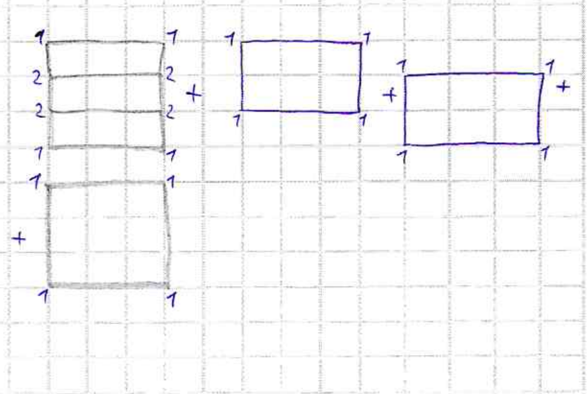
№7.

Ответ: да, может

Пример:



— состоит из:



№9.

При разбиении на треугольники разноцветными диагоналями не может возникнуть циклов, т.к. при цикле цвета обязаны чередоваться. Но цикл, в свою очередь, тоже нужно разбить на Δ, и поэтому обязательно появится Δ, состоящий из вершин цикла, что невозможно, т.к. тогда 2 вершины одного цвета будут рядом.

и что?

№ ~~8~~. 10.

Для того чтобы Вася получил число как можно меньше, он должен брать максимальное и минимальное число, которые он ещё не брал. Вася выпишет на доску наибольшее произведение, значит, Петя должен сделать хотя бы одно из произведений Васи максимальным. Это произойдёт, когда 2 числа, которые выбрал Петя, (эти 2 числа - средние) равны $\frac{1}{100}$ голословно

Если Вася будет изменять эти числа, т.е. прибавлять и вычитать по одинаковому числу (по условию возможно только это), то ~~б~~ их произведение всегда будет меньше: $(x-y)(x+y) < x^2$, и Вася всегда сможет так сделать.

~~Ответ: $\left(\frac{1}{100}\right)^2$~~ = ~~А~~ ~~наименьшее~~ наибольшее произведение будет тогда, когда 49 чисел $= 0$, т.к. во всех этих произведениях в итоге получится 0. К оставшимся 51 числам применимы те же соображения, и поэтому все эти числа $= \frac{1}{51}$ (при увеличении 1 числа уменьшается другое $\Rightarrow$ общее произведение будет меньше)

Ответ: $\left(\frac{1}{51}\right)^2 = \frac{1}{2601}$

голословно