Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

____ класс Шифр 1-9-08

№1

Путь $f(x) = x^2 + ax + b$
$g(x) = x^2 + cx + d$, тогда

$$\begin{cases} f(1) = g(2) \\ f(2) = g(1) \end{cases}$$ (узвестно по условию)

	1	2	3	4	5	Σ
к.р.	+	±	+	−	∓	
	7	5	7	0	1	20

$$\begin{cases} 1 + a + b = 4 + 2c + d \\ 4 + 2a + b = 1 + c + d \end{cases}$$

$4 - 1 + 2a - a + \cancel{b - b} = 1 - 4 + c - 2c + \cancel{d - d}$.

$3 + a = -3 - c$.

$a + c = -6$

По тео сумма корней $f(x)$ равна $-a$; сумма корней $g(x) = -c \Rightarrow$ сумма всех четырёх корней $-a - c$.

$-a - c = -(-6) = 6$.

Ответ: 6.

№2

Заметим, что тот кто сказал:

(1) „Моё число меньше 1го" и

(2) „Моё число меньше 2х" - мясцы.

Пусть тот, кто сказал 1 - рыцарь $\Rightarrow$ он загадал число 0 и менее,

Он сказал также* „Моё число больше x",
где x < 0, но такой фазы не сказал
никто => он лжец.
Пусть тот, кто сказал 2 - рыцарь,
он загадал 1 и меньше =>
его число больше 0 как минимум
=> Так же он сказал: „Мое
число больше y", где y 0 и меньше,
но такой фразы никто не сказал =>
он лжец.
У нас как минимум 2 лжеца;
=> максимум 8 рыцарей; и
это возможно приведем пример:

1) ">8"; "<3"
2) ">2"; "<4"
3) ">3"; "<5"
4) ">4"; "<6"
5) ">5"; "<7"
6) ">6"; "<8"
7) ">7"; "<9"
8) ">8"; "<10"
9) ">9"; "<1"
10) ">10"; "<2"

конкретные загаданные числа?

Где 1, 2... 8 - рыцари
9, 10 - лжецы.

* Сначала идет фраза из серии "мое число больше..." = ">", затем "мое число меньше..." = "<".

№3

Очевидно, что среди этих 100 чисел есть минимальное(x_{min}) и Вася делил на него какое-то число, причем остаток от деления на x_{min} — $a < x_{min}$ — очевидно! => один из остатков которые получались у Васи это a, которое меньше x_{min}, второй это само x_{min} (т.к. x_{min} мы также делим на како-то число x, причем $x > x_{min}$ => в остатке x_{min}).

Заметим, что если мы делим x_1 на x_2, причем $x_2 > x_1$, то в остатке будет x_1.

Мы знаем, что у Васи в остатке получилось всего два числа a(, которое меньше x_{min}) и x_{min}.; Если у нас есть како то 2 числа x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_{min}$, а x_{min} - одно, т.к. все числа различны) x_1 и x_2 стоят рядом, по часовой стр., то при делении x_1 на x_2 пол a или x_{min}, в любом случае остаток от деления $< x_1$ => $x_1 > x_2$.

Рассмотрим последовательность по часовой стрелки начиная с числа стоящего после x_{min}, назовем его x_1, за мин x_2 и т.д... =>.

$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{99} > x_{min}$

Теперь рассмотрим деление против часовой стрелки

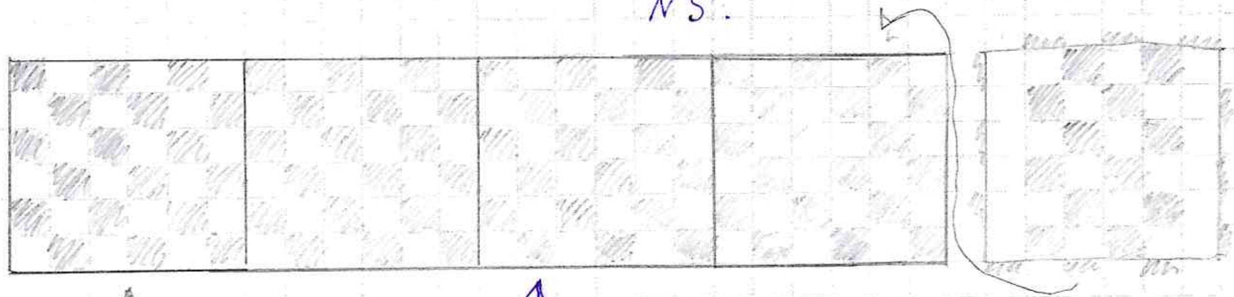
$x_{min} < x_{99}$ => при делении в остатке дает само себя; x_{99} на x_{98} — остаток x_{99} и т.д.

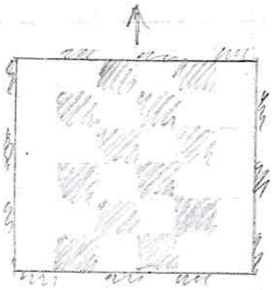
То есть при делении против часовой стрелки в остатках мы получаем

$x_{min}; x_{99}; x_{98}; x_{97} \dots x_2$ — все различны;

Остается найти остаток при делении x_1 на x_{min}; остаток будет меньше x_{min} => не равен ни одному и ранее найденых => все остатки при делении различны.

№5.





$4 \cdot 1000^2 \cdot \frac{1}{2} = 2000000$

По бокам: $998 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 =$

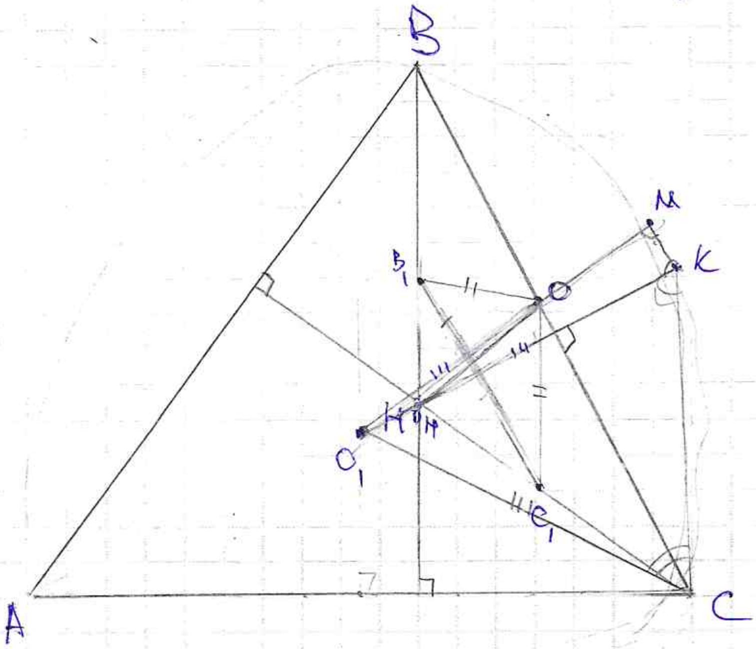
$= 998000$.

Всего закрашено: 2998000.

Ответ: 2998000; 4 грани закрашены максимально, у оставшихся 2х не закр. ни одна кл. в 2 ст.: для того чтобы закрасить еще хотя бы одну кл. требуется убрать 1 с одной соседней с гранью.

Почему другие способы хуже?

№4



дано:

$\omega(O, OH)$;

$\Gamma(O_1; O_1C)$.

$B_1C_1 \parallel BC$.

$CH \perp AB$.

$BH \perp AC$.

доказать:

ω касается Γ.

Док-во

Доп. постр.: $OM = OC$ — (радиус Γ), проходящий через O (центр ω).

$B_1O = HO = OC_1$ — как радиусы; Если $OM = OB_1 = OC_1 = OH$, то ω касается Γ;

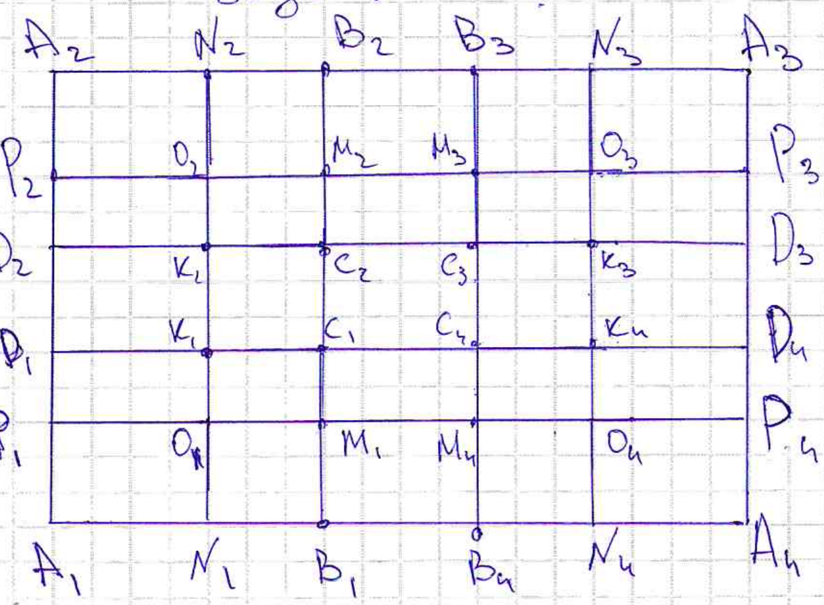
Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

____ класс Шифр 2-9-03

	6	7	8	9	10	Σ
им	+	+	–	–	–	
	7	7	0	0	0	14
	к.р.	к.р.	к.р.			

№7

Это возможно.



Лежат прямоуг.:

$A_1A_2A_3A_4$ — A_3: 3+0
$A_1B_1C_1D_1$ — N_3: 1+2
$A_2B_2C_2D_2$ — B_3: 1+2
$A_3B_3C_3D_3$ — P_3: 1+2
$A_4B_4C_4D_4$ — O_3: 1+2
$P_1A_1N_1O_1$ — M_3: 0+3
$P_2A_2N_2O_2$ — P_3: 1+2
$P_3A_3N_3O_3$ — K_3: 0+3
$P_4A_4N_4O_4$ — C_3: 1+2

$O_1K_1C_1M_1$; $O_2K_2C_2M_2$
$O_3K_3C_3M_3$; $O_4K_4C_4M_4$.
$O_1N_1B_1M_1$ $O_2N_2B_2M_2$
$O_3N_3B_3M_3$ $O_4N_4B_4M_4$
$D_1D_2K_2K_1$ $K_3K_4D_4D_5$
$N_1K_1C_1B_1$ $N_2K_2C_2B_2$
$N_3K_3C_3B_3$ $N_4K_4C_4B_4$
$P_1P_2M_2M_1$ $M_4M_3P_3P_4$
$P_1P_2P_3P_4$ $D_1D_2D_3D_4$

или.

ABCD
BEKA ECDG
BEKA ECDK.
EFGK

№6

Рассмотрим остатки от деления 4х различных подряд идущих чисел на 6. Очевидно, что они будут различными.

$\equiv 1$ $\equiv 2$ $\equiv 3$ $\equiv 4$ $\equiv 5$ $\equiv 0$ $\equiv 1$

и т.д по кругу; у нас возможно 6 различных случаев, когда присутствуют числа с теми или иными ост. от деления на 6 (4 посл числа – 4 посл ост).

1. Рассмотрим сразу 2 случая:

1) $\equiv 1$, $\equiv 2$, $\equiv 3$, $\equiv 4$ и 2) $\equiv 0$, $\equiv 1$, $\equiv 2$, $\equiv 3$, тогда.

сума чисел $\equiv 1$; $\equiv 2$; $\equiv 3$ делиться на 6.

2. И ещё 2 случая.

1) $\equiv 2$, $\equiv 3$, $\equiv 4$, $\equiv 5$ 2) $\equiv 3$, $\equiv 4$, $\equiv 5$, $\equiv 0$.

Тогда сумма чисел $\equiv 3$; $\equiv 4$ и $\equiv 5$ делиться на 6

3. $\equiv 4$ $\equiv 5$ $\equiv 0$ $\equiv 1$ – посл. 2 случай

$\equiv 5$ $\equiv 0$ $\equiv 1$ $\equiv 2$.

$\equiv 5 + \equiv 0 + \equiv 1$ – сумма этих чисел делиться на 6.

Мы доказали, что из любых 4х последовательных чисел можно выбрать три так, чтобы их сумма делилась на 6.

Мы имеем 4 числа больших 100 ⇒ Сумма любых трех из них >300. Мы можем выбрать три так, что их сумма делится на 6, при чем при делении на 6 пол число $x>50$ ⇒ Мы можем разложить их сумму на множители: $2\cdot3\cdot x$ (где $x>50$ ⇒ $x\neq2$ и $x\neq3$, и x – целое) Мы можем разложить сумму этих трех чисел на 3 разных натуральных числа.

№10.

Петя выбирает $x_1; x_2; x_3; x_4 \ldots x_{100} \geq 0$, $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{100}=1$, т.к. он хочет макс. число, и по пр Вася должн был макс пол число. Пете выгодно чтобы у Васи в любом случае одна из пар получилась максимальной, оставшиеся 49 – любые, что бы произв. пол макс Пете выгоднее чтобы числа в этом пр были как можно больше ⇒ ему надо чтобы 51 из 49 чисел были макс. (Если 50 и 50, то Вася умножит все нужное Пете на все „маленькие" и получит не то, что надо Пете), пусть ост 49 – будут минимальными, равными 0. голословно

Пете выгодней чтобы все от 51 число были равны между собой.

Если это будет не так?

Пусть у нас есть максимальное: $\frac{1}{51}+x$, Вася выберет ему в пару наименьшее, (Ну или то, которому будет дост, чтобы оно не стало наиб).

Пете выгодней, чтобы это наименьшее было как можно больше, а именно $\frac{1}{51}-\frac{1}{50}x$. (Тогда все оставшиеся равны между собой); заметим, что $x<\frac{50}{51}$, тогда макс $=1$, все от 0, Максимально пр - $0 < \frac{1}{51^2}$

$$\left(\frac{51x+1}{51}\right)\cdot\left(\frac{50-51x}{51\cdot 50}\right)=$$

$$=\frac{(51x+1)(50-51x)}{51^2\cdot 50}=\frac{1}{51^2}\cdot\frac{(51x+1)(50-51x)}{50}$$

~~$51x+1<51$ $\left(x<\frac{50}{51}\right)$ $\Bigg| \Rightarrow$~~
~~$50-51x<50$ $x>0$~~

~~$\frac{(51x+1)(50-51x)}{50}<1$~~

$$\frac{(51x+1)(50-51x)}{50}=\frac{2550x-51x-51^2x^2+50}{50}=$$

$$\frac{49\cdot 51x-51^2x^2+50}{50}$$

$$51^2x^2>49\cdot 51x$$

$$\Rightarrow \frac{(51x+1)(50-51x)}{50}<1 \Rightarrow$$

Если числа не равны, то произведение максимального меньше возможного, при условии того, что все (51) числа равны.
=> Выгодней для Пети, если остальные 51 будут равны между собой => они будут равны $\frac{1}{51}$ (т.к. в сумме должны давать 51)
=> Наибольшее произведение — $\frac{1}{51}\cdot\frac{1}{51}=\frac{1}{2601}$

Ответ: $\frac{1}{2601}$, Петей будут загаданы:

$\underbrace{\frac{1}{51}, \frac{1}{51} \dots \frac{1}{51}}_{51}$; $\underbrace{0, 0, 0 \dots 0}_{49}$

Вы разбираете частный случай. Все варианты так не перебираются.

№9.

Рассмотрим уже разбитый на Δ четырёхугольник:

, Две вершины останутся свободными (из них не выходит ни одной диагонали) остальные задаются сами, автоматически, возможны 2 варианта (Раскрашиваем одну, остальные автоматически) при любом делении четырёхугольника). Оставшиеся две есть 4 способа раскрасить в разные цвета (2×2, Вар раскр 1ой × Вар раск второй) =>

почему их две?

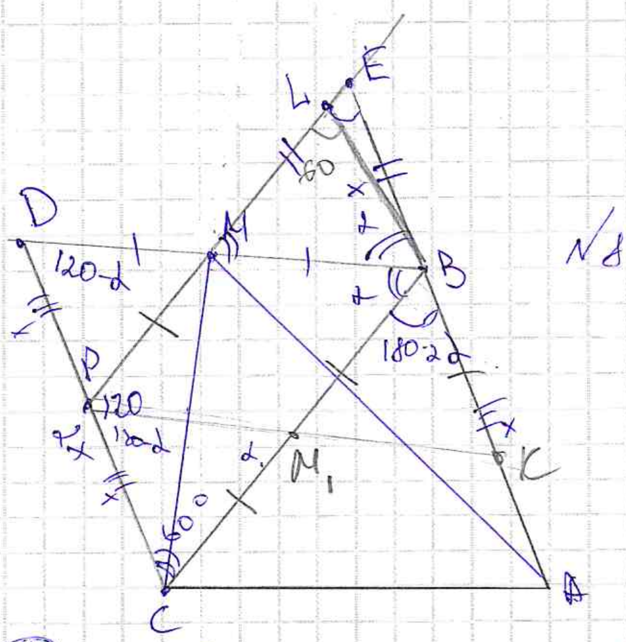
Всего способов раскрасить уже разбитый

Вариантов разбиений есть много. И по разным вариантам будут разные раскраски.

многоугольник: 2×4 = 8..

Количество хороших раскрасок – 8× количество способов разбить n-угольник на Δ непересек. диагоналями.
n – из одной вершины n-3 диагонали

разные разбиения дают разные ...
поэтому некоторые из раскрасок ...



№8

дано:
DM = MB
∠DCB = 60°
∠DBC = ∠DBE
AB = x, BC = 2x.
доказать:
Δ CMA – равнобедр.

Док – во

как определена точка E?

P – середина DC => PM – ср линия =>
PM ∥ BC => ∠PMB + ∠CBM = 180°; ∠BME (накрест леж); ∠CBM = ∠MBE – по усл => ME = EB.
Пусть ∠CBM = ∠MBE = α => ∠PEB = 180 – 2α;
∠CBA = 180 – 2α ∠MCB = ∠PMC ∠CDB = 120 – α
∠PMB = ∠MBA = 180 – α, Пусть PK ∥ AB =>
PK делит CB пополам в M_1 ($PMBM_1$ – параллелогр =>
BM_1 = PM; BC = 2PM – т.к. PM – ср линия)

и что?