Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс Шифр 1-9-12

1	2	3	4	5	Σ
+	+	⊖	+	∓	
7	7	0	7	1	22
к.р.	к.р.				

№1

Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ приведённые квадратные трёхчлены, то они имеют вид $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$. Тогда, если x_1 и x_2 — корни $f(x)$, а x_3 и x_4 — корни $g(x)$, то по теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_3+x_4=-c$, откуда $x_1+x_2+x_3+x_4=-a-c$

$f(1)=g(2) \iff 1+a+b=4+2c+d$

$g(1)=f(2) \iff 1+c+d=4+2a+b$

Сложим полученные уравнения:

$1+a+b+1+c+d=4+2c+d+4+2a+b$

$2+a+b+c+d=8+2a+2c+b+d$

$-6=a+c$

$-a-c=6 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=6$

Ответ: сумма всех 4 корней равна 6

№2

Заметим, что число любого рыцаря больше 1, ибо каждый рыцарь сказал что его число больше некоторого n, где $n\in\{1,2,3,\ldots,10\}$, т.е. его число $>n$ и поэтому >1 (т.к. $n\geq1$). Т.к. все загадывали целые числа, то число любого рыцаря хотя бы 2 $\Rightarrow$ те 2 человека, которые сказали 'Моё число меньше 1' и 'Моё число меньше 2' не могут быть рыцарями, т.е. рыцарей не больше 8

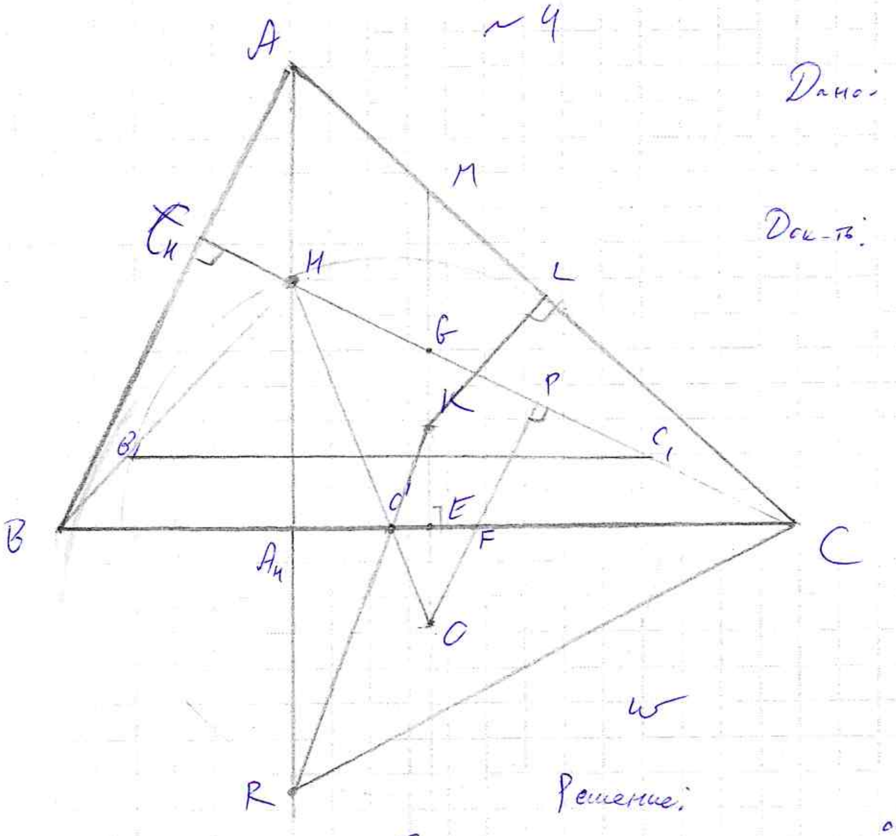
Приведём теперь пример, в котором ровно 8 рыцарей:

Номер человека: во время 1-го высказывания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рыцарь или лжец:	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л
Число, к-рое он загадал:	2	3	4	5	6	7	8	9	3	4
Номер, к-рым он выступал во время 2-го высказывания	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2

(1-й человек, рыцарь, говорит 'Моё число больше 1' и 'Моё число меньше 3', а загадал 2, ..., 8-й человек, рыцарь, загадал 9 и сказал 'Моё число больше 8' и 'Моё число меньше 10', 9-й человек, лжец, загадал 3 и сказал 'Моё число больше 9' и 'Моё число меньше 1', 10-й человек, лжец, загадал 4 и сказал 'Моё число больше 10' и 'Моё число меньше 2')

Ответ: макс. число рыцарей среди этих 10 человек равно 8.

№ 4



Дано: $B_1C_1 \parallel BC$

$O' \in BC$

Док-ть: ω кас-ся Γ

Решение:

около ΔBCH

?

O' — центр окр. ω. Пусть O — центр окр. описанной ~~вокруг~~ около BC. Т.к. $B_1C_1 \parallel BC$, то при гомотетии с центром в H и коэф-ом $\frac{HC_1}{HC}$ т. C переходит в т. C_1, прямая BC переходит в прямую, параллельную ей, а т.к. C переходит в C_1, то эта прямая — B_1C_1 ⟹ B переходит в B_1. Таким образом, при этой гомотетии Δ HBC переходит в Δ HB_1C_1, поэтому O переходит в O' (т.к. это центры окр., описанных около Δ HBC и Δ HB_1C_1) ⟹ $O' \in HO$, т.е. $O' = OH \cap BC$

Пусть K — центр окружности описанной около ΔABC, E — середина BC, P — серед. HC, L — сер. AC, A_H — основание высоты AA_H, M — т. пересеч. сер. пер. к BC и AC, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, C_H — основание высоты CC_H

Т.к. K и O — центры окр., описанных около Δ ABC и Δ BHC, то они лежат на сер. пер. к BC

Т. к. $\triangle CBC_H$ – прямоугольный, то $\angle C_H CB = 90^\circ - \angle C_H BC = 90^\circ - \beta$

$\triangle CGE$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle CGE = 90^\circ - \angle GCE = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$

$\triangle OGP$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle GOP = 90^\circ - \angle OGP = 90^\circ - \beta$

$$\frac{EO}{EF} = \frac{1}{tg\angle EOF} = \frac{1}{tg\angle GOP} = \frac{1}{tg(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$EF = EC - FC = EC - \frac{CP}{\cos\angle PCF} = EC - \frac{CP}{\cos(90^\circ - \beta)} = EC - \frac{CH}{2\sin\beta}$$

$$EO = EF\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = EC\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{CH}{2\cos\beta}$$

Т. к. $AC = \frac{A_HC}{\cos\angle ACB} = \frac{A_HC}{\cos\gamma}$, $CH = \frac{A_HC}{\cos\angle C_HCB} = \frac{A_HC}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{A_HC}{\sin\beta}$, то

$A_HC = CH\sin\beta \Rightarrow AC = \frac{CH\sin\beta}{\cos\gamma}$, $CH = AC\frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow EO = EC\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - AC\frac{\cos\gamma}{2\cos\beta\sin\beta}$$

Теперь посчитаем EK

$$EK = \cancel{PE - PK} = ME - MK = EC\, tg\angle ACB - MK = EC\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} - MK$$

$$MK = \frac{ML}{\cos\angle KML} = \frac{ML}{\cos\angle A_HAC} = \frac{ML}{\cos(90^\circ - \gamma)} = \frac{ML}{\sin\gamma} = \frac{MC - CL}{\sin\gamma} = \frac{\frac{EC}{\cos\gamma} - \frac{AC}{2}}{\sin\gamma} =$$

(эти углы равны ибо $AA_H \parallel ME$ ибо $AA_H \perp BC$, $ME \perp BC$)

$$= \frac{EC}{\cos\gamma\sin\gamma} - \frac{AC}{2\sin\gamma}$$

$$EK = EC\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} - MK = EC\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} - \frac{EC}{\cos\gamma\sin\gamma} + \frac{AC}{2\sin\gamma} = \frac{AC}{2\sin\gamma} - EC\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$EC = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{2} = AC\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta}$, откуда $EO = AC\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - AC\frac{\cos\gamma}{2\cos\beta\sin\beta}$

$$EK = \frac{AC}{2\sin\gamma} - \frac{AC}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

Покажем, что $EK = EO$, т. е. $\frac{AC}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - \frac{AC}{2}\frac{\cos\gamma}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{AC}{2\sin\gamma} - \frac{AC}{2}\frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{1}{\sin\gamma} - \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Т. к. $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$, то $\sin\alpha = \sin(\gamma + \beta)$

$$\frac{\sin(\gamma+\beta)\sin\beta-\cos\gamma}{\cos\beta\sin\beta}=\frac{\sin\beta-\sin(\gamma+\beta)\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\sin(\gamma+\beta)\sin\beta\sin\gamma-\cos\gamma\sin\gamma=\sin\beta\cos\beta-\sin(\gamma+\beta)\cos\gamma\cos\beta$$

$$\sin(\gamma+\beta)\left[\sin\beta\sin\gamma+\cos\gamma\cos\beta\right]=\cos\gamma\sin\gamma+\sin\beta\cos\beta$$

$$\left[\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma\right]\left[\sin\beta\sin\gamma+\cos\gamma\cos\beta\right]=\cos\gamma\sin\gamma+\sin\beta\cos\beta$$

$$\sin^2\gamma\cos\beta\sin\beta+\cos^2\beta\sin\gamma\cos\gamma+\sin^2\beta\cos\gamma\sin\gamma+\cos^2\gamma\sin\beta\cos\beta=\cos\gamma\sin\gamma+\sin\beta\cos\beta$$

$$\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma=\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma$$ это верно и очевидно

Этим мы доказали, что $EO=EK \Rightarrow O'E$ — медиана и высота в $\triangle OO'K \Rightarrow$
$\Rightarrow OO'K$ — равнобедренный и $\angle O'KO=\angle KOO'$

Пусть $R=O'K\cap HA_H$. Т.к. $HA_H\perp BC$, $KO\perp BC$, то $HA_H\parallel KO \Rightarrow \angle RHO'=\angle O'K=$
$=\angle O'KO=\angle O'HR$, т.е. $\triangle HO'R$ — равнобедренный и $O'R=O'H$, т.е. точка R лежит на окр. ω

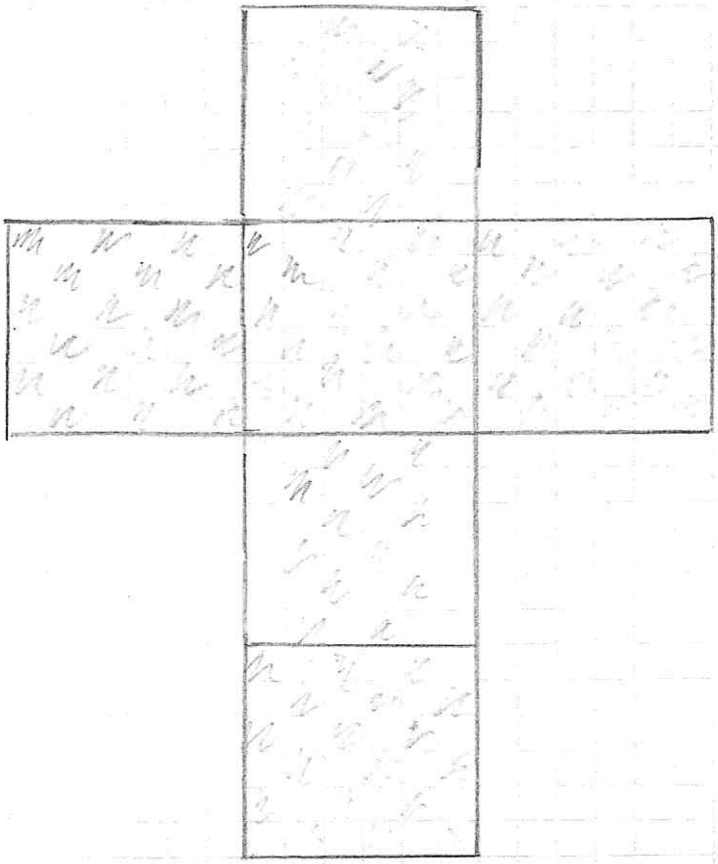
~~Таким образом~~ Докажем теперь, что т. R лежит на окр. Γ (описанной около $\triangle ABC$). Т.к. $O'H=O'R$, то $\triangle HO'R$ — равнобедренный, $\Rightarrow O'A_H$ явл-ся не только высотой (ибо $HA_H\perp BC$), но и медианой, т.е. $A_HH=A_HR$. Поэтому CA_H в $\triangle CHR$ явл-ся высотой и медианой $\Rightarrow \triangle CHR$ — равнобедр. $\Rightarrow CA_H$ — бис-са, т.е. $\angle A_HCR=$
$=\angle C_HCA_H$

Т.к. $\triangle CBC_H$ и $\triangle CA_HR$ — прямоугольные, то $\angle ABC=90^\circ-\angle C_HCA_H$, $\angle ARC=90^\circ-\angle A_HCR$, но т.к. $\angle A_HCR=\angle C_HCA_H$, то $\angle ABC=\angle ARC \Rightarrow$ четырёхугольник $ABCR$ — вписанный $\Rightarrow R\in\Gamma$

Таким образом $R\in\omega$, $R\in\Gamma$ и т. R лежит на прямой KO', соединяющей центры этих окружностей. Отсюда очевидно, что эти окр. больше не имеют точек пересечения (если бы они имели ещё одну общую точку S, то ввиду симметрии отн-но прямой KO' они имели бы ещё одну точку пересечения S', симметр. S отн-но KO', но тогда бы у этих окр. было 3 т. пересечения R, S, S', что невозможно, ибо эти окр., очевидно, не совпадают), т.е. окр. ω и Γ касаются

№ 5

Я просто привожу пример на $3 \cdot 10^6 - 2 \cdot 1000$.



(развёртку куба раскрашиваем в шахматном порядке, но у двух противоположных граней не краши ~~2 стор.~~ квадратики у 2 ребер)

Всероссийская олимпиада школьников по математике
2018/2019 учебный год.
Региональный этап.

_____ класс　　　　　　　　Шифр 2-9-07

№6

Обозначим наименьшее из чисел через n, тогда оставшиеся 3 числа это $n+1$, $n+2$ и $n+3$.

Если n – ~~нечётное~~ чётное, т.е. $n \equiv 0 \pmod 2$, то сумма последних 3 чисел из данных четырёх, равная $n+1+n+2+n+3 = 3n+6$, кратна 6, ибо $3n \vdots 6$ (т.к. $n \vdots 2$ т.е. $n = 2z$, где z – целое, то $3n = 6z$, т.е. $3n \vdots 6$) и $6 \vdots 6$, поэтому эта сумма равна произведению чисел 2, 3 и $\frac{3n+6}{6}$ (т.к. $n \geq 100$, то $\frac{3n+6}{6} \geq 51 > 3$, т.е. эти 3 числа различны)

Если n – нечётное, т.е. $n \equiv 1 \pmod 2$, то сумма первых 3 чисел из данных 4, равная $n+n+1+n+2 = 3n+3$, кратна 6, ибо $3n+3 = 3(n+1)$, где $n+1$ – чётное, (т.к. 2 и 3 – взаимно простые) т.е. $3n+3 \vdots 2$ и очевидно $3n+3 \vdots 3$ откуда сразу следует $3n+3 \vdots 6$, т.е. эта сумма равна произведению чисел 2, 3 и $\frac{3n+3}{6}$ (т.к. $n \geq 100$, то $\frac{3n+6}{6} \geq 50 > 3$, т.е. эти числа различны)

(№7 в конце)

	6	7	8	9	10	Σ
АМ	+	+	+	±	∓	
	7 К.Р.	7 К.Р.	7 ИМ	~~5~~ 4 Ан. ИМ	1 ИМ	

№8

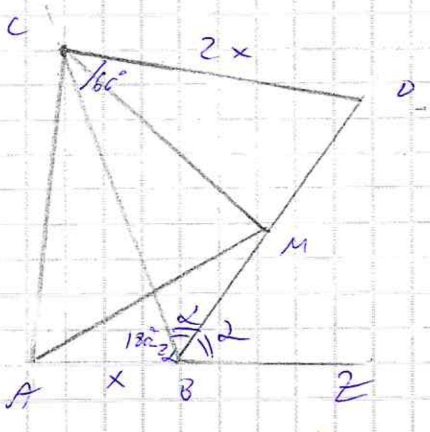
Дано: $CD = 2AB$

$\angle BCD = 60°$

$\angle CBD = \angle ZBD$

$BM = MD$

Док-ть: $MC = MA$



Решение:

Обозн. $AB = x$, тогда $CD = 2x$. Обозн. $\angle CBD = \angle DBZ = \alpha$

По т. синусов: $\frac{BD}{\sin\angle BCD} = \frac{CD}{\sin\angle CBD}$, т.е. $BD = \frac{\sin 60°}{\sin\alpha} \cdot 2x = \frac{\sqrt{3}\,x}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{MD=}{BM} = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{3}\,x}{2\sin\alpha}$

По т. косинусов $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos\angle ABM = x^2 + \frac{3x^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{\sqrt{3}\,x^2}{\sin\alpha}\cos(180°-\alpha) =$

$= x^2 + \frac{3}{4}\frac{x^2}{\sin^2\alpha} + \sqrt{3}\,\frac{x^2\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\angle D = 180^\circ - \angle BCD - \angle CBD = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle D = \cos(120^\circ - \alpha) = \cos 120^\circ \cos\alpha + \sin 120^\circ \sin\alpha = -\frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$

По т. косинусов $MC^2 = DC^2 + DM^2 - 2\,MD\cdot DC\cdot\cos\angle D = 4x^2 + \frac{3}{4}\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - 2\cdot 2x\cdot\frac{\sqrt{3}x}{2\sin\alpha}\cdot$

$\cdot\cos(120^\circ - \alpha) = 4x^2 + \frac{3}{4}\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{\sqrt{3}x^2}{\sin\alpha}(\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha) = 4x^2 + \frac{3}{4}\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - 3x^2 + \frac{\sqrt{3}x^2\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$= x^2 + \frac{3}{4}\frac{x^2}{\sin^2\alpha} + \sqrt{3}\frac{x^2\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Таким образом $MA^2 = MC^2$, откуда $MA = MC$ (ибо очевидно $MA \neq -MC$), ч.т.д.

№10

Расставим выбранные Петей числа в порядке возрастания, т.е. так чтобы $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_{99} \le x_{100}$

Кому?

Докажем, что ~~лучшее~~ разбиение этих чисел на пары для Васи — это пары $x_1x_{100}, x_2x_{99}, \ldots, x_nx_{101-n}, \ldots, x_{50}x_{51}$, т.е. $\max(x_1x_{100}, x_2x_{99}, \ldots, x_{50}x_{51}) \le$ ✓

$\le \max$ (пары любого другого разбиения)

Рассмотрим разбиение, отличное от данного, в к-ром x_1 связано не с x_{100}, а с неким другим x_ℓ, а x_{100} связано с некоторым x_m. Заметим, что

$\max(x_1x_\ell, x_mx_{100}) \ge \max(x_1x_{100}, x_\ell x_m)$, ибо $\max(x_1x_\ell, x_mx_{100}) \ge x_mx_{100} \ge x_1x_{100}$

(т.к. $x_m \ge x_1$ ибо числа в порядке возрастания расставлены) и $\max(x_1x_\ell, x_mx_{100}) \ge$

$\ge x_mx_{100} \ge x_mx_\ell$ (ибо $x_{100} \ge x_\ell$), т.е. x_mx_{100} больше и x_1x_{100}, и $x_\ell x_m$, поэтому

$\max(x_1x_\ell, x_mx_{100}) \ge x_mx_{100} \ge \max(x_1x_{100}, x_\ell x_m)$. Ясно, что такой перестановкой мы не можем ухудшить разбиение, т.е. от такой перестановки max разбиения не увеличится ибо он был равен $\max$(другие пары, x_1x_ℓ, x_mx_{100}) $= \max$(другие пары, $\max(x_1x_\ell, x_mx_{100})$), а стал равен $\max$(другие пары, $x_1x_{100}, x_\ell x_m$) $= \max$(другие пары, $\max(x_1x_{100}, x_\ell x_m)$) (другие пары мы не изменили), а т.к. $\max(x_1x_\ell, x_mx_{100}) \ge \max(x_1x_{100}, x_\ell x_m)$, то очевидно что $\max$(другие пары, $\max(x_1x_\ell, x_mx_{100})$) $\ge \max$(другие пары, $\max(x_1x_{100}, x_\ell x_m)$) т.е. число, к-рое выпишет Вася на доску, не увеличилось при такой перестановке.

Аналогично доказывается, что если в полученном ~~нарисо~~ разбиении (в к-ром есть пара x_1x_{100}) теперь объединить в одну пару x_2 и x_{99} (т.е. сделать перестановку $x_2x_p, x_qx_{99} \to x_2x_{99}, x_px_q$), то max всего разбиения не увеличится. Подобными перестановками за конечное их кол-во (не больше 50) мы приходим от произвольного разбиения к разбиению $x_1x_{100}, \dots, x_n x_{101-n}, \dots, x_{50}x_{51}$, причём max всех пар разбиения при каждой перестановке не увеличивается, поэтому $\max(x_1x_{100}, \dots, x_{50}x_{51}) \le \max$ (пары другого разбиения) т.е. при правильной игре Вася выпишет на доску число $\max(x_1x_{100}, \dots, x_{50}x_{51})$ „радуга"

Теперь докажем, что чтобы полученное Васей число было максимальным, все x должны быть равны 0,01. Рассм. набор чисел, для к-рого это не так, т.е. в к-ром миним. число $x_1 \ne 0{,}01$, т.е. $x_1 < 0{,}01$ (большим x_1 очевидно не может быть больше 0,01, т.к. иначе все 100 чисел $>0{,}01$ и их сумма >1, хотя на самом деле она равна 1). Тогда $x_{100} > 0{,}01$ (иначе, если $x_{100} \le 0{,}01$, то все 100 чисел $\le 0{,}01$, но хотя бы одно строго $<0{,}01$, т.е. их сумма <1, что противоречит условию). Докажем теперь, что Пете выгодна замена $(x_1; x_{100}) \to (0{,}01; x_1 + x_{100} - 0{,}01)$ т.е. $1/2 \ominus 1/198$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{200}$ но не всегда возможна! ост. числа $\le 0{,}01$!

$0{,}01 \cdot (x_1 + x_{100} - 0{,}01) \geq x_1 x_{100}$. Введём для удобства обозначение $\delta = 0{,}01 - x_1$, тогда нер-во запишется следующим образом:

может нарушиться монотонность

$(x_1 + \delta)(x_{100} - \delta) \geq x_1 x_{100}$

$x_1 x_{100} + \delta(x_{100} - x_1) - \delta^2 \geq x_1 x_{100}$

$\delta(x_{100} - x_1 - \delta) \geq 0$

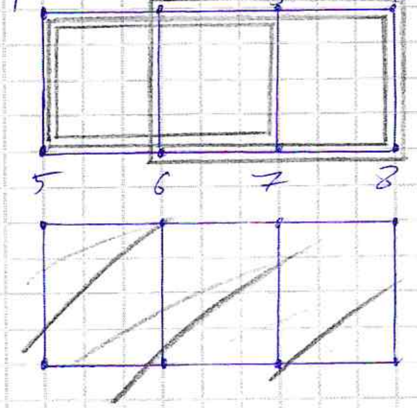
Подставляя $\delta = 0{,}01 - x_1$, получаем $(0{,}01 - x_1)(x_{100} - 0{,}01) > 0$, что верно, ибо оба множителя положительны. Таким образом, Пете выгодна замена $(x_1; x_{100}) \to (0{,}01; x_{100} + x_1 - 0{,}01)$, т.к. число выписываемое Васей на доску при этом очевидно не уменьшается (фактически мы просто увеличили $x_1 x_{100}$, при этом $\max(x_1x_{100}, \dots, x_{50}x_{51})$ уменьшиться не может). Проделав такую операцию конечное число раз (не больше 100), мы из любого набора чисел $x_1, \dots, x_{100}$ можем получить $0{,}01, \dots, 0{,}01$, при этом каждый раз $\max(x_1x_{100}, \dots, x_{50}x_{51})$ не уменьшается, т.е. набор $0{,}01, \dots, 0{,}01$ для Пети самый выгодный.

Таким образом, при правильной игре на доске окажется число $\max(10^{-4}, 10^{-4}, \dots, 10^{-4}) = 10^{-4}$

Ответ: 10^{-4}

№7

Да, можно. Приведём пример



Пронумеруем вершины и будем класть на стол прямоугольники с вершинами в следующих наборах точек:

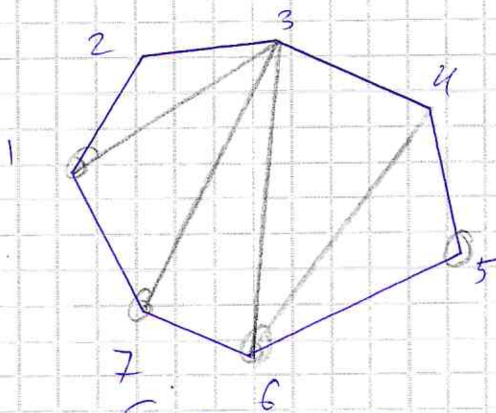
1 2 6 5   1 3 7 5

2 3 7 6   2 4 8 6

3 4 8 7   1 4 8 5

№9

Пронумеруем вершины n-угольника и будем сопоставлять n-угольнику набор



из n нулей и единиц, причём i-я цифра будет 0, если i-я вершина не закрашена (белая) и будет 1, если i-я вершина закрашена (чёрная)

Например, 7-угольнику слева будет соотв. набор 1000111 (закрашенные вершины я обвёл в O)

Попробуем составить нек-рый критерий, по к-рому можно было бы определить, явл-ся ли раскраска хорошей. Рассм. хорошую раскраску и разбиение n-угольника разноцветными диагоналями. Заметим, что в каждом разбиении n-угольника диагоналями на треугольники всегда есть треугольник, вершины к-рого явл-ся 3 последовательными вершинами n-угольника (например, 123 и 456 на рисунке). Докажем это по индукции: база для 4-угольника очевидна, ~~а при~~ переход: при триангуляции n-угольника он разбивается на k-угольник и m-угольник, где k и m — нат. числа меньше n, а при их триангуляции образуются ~~очевидные~~ такие треугольники по предположению индукции). Отбросим теперь среднюю (по нумерации) вершину этого треугольника и рассмотрим оставшийся n-1 угольник. Очевидно, что его раскраска тоже хорошая (мы рассматривали хорошую раскраску и нек-рое разбиение n-угольника разноцветными диагоналями, поэтому оставшийся n-1 угольник тоже будет разбит разноцвет-

Не до

а если они внутри?

нылся диагоналями). Этой операции соот-ет отбрасывание i-й цифры в посл-ти 0 и 1, соот-ей этому n-угольнику, причём i-1 и i+1-я цифры были соединены разноцв. диагонально ⇒ это были разные цифры

В рассматриваемом n-1 угольнике снова найдём треуг., вершины на к-рые был разбит n-1-угольник диагоналями и вершины к-рого были 3-мя посл-ми вершинами n-1 угольника и снова отбросим среднюю по нумерации вершину этого треуг. Проделав эту операцию конечное число раз, мы придём к 4-угольнику, и сделав так ещё один раз — к 3-угольнику, причём ему не могут соот-ть посл-ти 111 или 000 т.к. одно из его рёбер было разноцв. диагональю в 4-угольнике

а 001? 110?

<u>Отсюда сразу следует, что любой хорошей раскраске соотает посл-ть, к-рая</u> может быть получена из 010 или 101 добавлением 1 или 0 между соседними 1 и 0 (мы проделываем операцию, обратную выше описанной, т.е. восстанавливаем n-угольник из треугольника добавлением вершин). Из этого, в свою очередь, следует что любой хорошей раскраске соотает посл-ть вида $\underbrace{00\ldots0}_{\text{единицы}}\underbrace{11\ldots1}_{\text{единицы}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{нули}}$ либо $\underbrace{11\ldots1}_{\text{единицы}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{нули}}\underbrace{1\ldots1}_{\text{единицы}}$. Посчитаем кол-во таких раскрасок:

меньше $\frac{n(n-1)}{2}$?

Будем ставить перегородку ~~между~~ на границе 0 и 1 $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ способов и умножить на 2 ~~т.к.~~ ибо нужно выбрать один из 2 типов (010 или 100) т.е. в итоге $n(n+1)$

а почему все такие посл-ти соот. хорошим раскраскам?