Задание 1

Пусть $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e = x$, где

$a, b, c, d, e \in N \Rightarrow x \in N$

$\Rightarrow (a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3) =$

$= 5abcde - 12a - 12b - 12c - 12d - 12e = 15x$

(т.к. произведение должно увеличиться в 15 раз)

$\Rightarrow -12(a+b+c+d+e) = 10x$, что невозможно,

т.к. $\begin{cases} 12(a+b+c+d+e) > 0 \\ 10x > 0 \end{cases}$

Ответ: нет.

Задание №2

~~Пусть~~ $n_1^{2017} + b\cdot n_1^{2016} + \ldots + e n_1 + q = p_1$

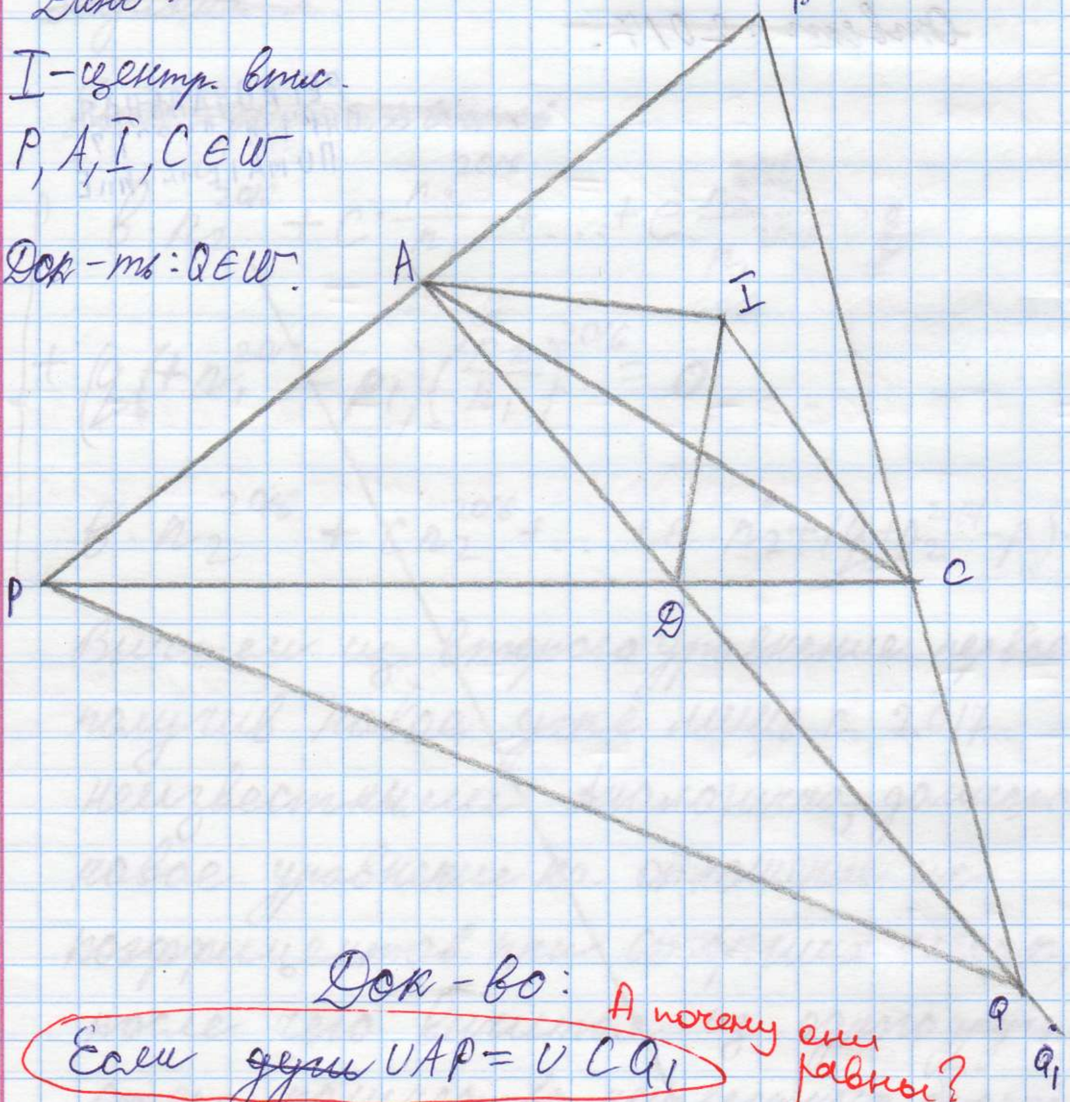
$\begin{cases} b\cdot n_1^{2016} + c\cdot n_1^{2015} + \ldots + e\cdot n_1 + (q + n_1^{2017} - p_1) = 0 \\ b\cdot n_2^{2016} + c\cdot n_2^{2015} + \ldots + e\cdot n_2 + (q + n_2^{2017} - p_2) = 0 \end{cases}$

Дано:

I – центр. впис.

P, A, I, C ∈ ω

Док-ть: Q ∈ ω.



Док-во:

Если дуги ∪AP = ∪CQ₁

А почему они равны?

=> ∠QAC = ∠PCA

=> △ADC – равнобедр.

=> AD = CD

DI – биссектр.

DI – общ.

=> △ADI = △CDI

$\Rightarrow \angle DAI = \angle DCI$

AI, CI - биссектр.

$\Rightarrow \begin{cases} \angle BAD = \angle DCB \\ \angle B \text{ - общий} \end{cases}$

$\Rightarrow \angle BPC = \angle BQA$

$\Rightarrow Q \in \omega$.

~~Из $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ и $\triangle$~~

Задание 5.

Заметим, что произведение

иррациональное · рациональное =

= иррациональное (всегда).

$P \cdot P = P$

Также (т.к. мы ищем наибольшее возможное рациональных произведений) ~~всег~~ можно подобрать иррациональн. числа, которые при умножении друг на друга, дают рациональное число. Например: $\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$ и т.д.,

где $3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 42$. Или $\sqrt{x}$; $a\sqrt{x}$; $b\sqrt{x}$...,

где $a, b, x \in Z \Rightarrow a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{x} = abx \in Z$.

$\Rightarrow$ Нужно получить максимальное кол-во произведений И·И ~~или~~ и Р·Р.

$\Rightarrow$ Максимальное число рациональных произведений будет при 25 иррац. и 25 рацион. ~~в~~ слева от каждой

строки и аналогично сверху от каждого столбца, т.к. если поменять иррац. из строки с рацион из столбца (или наоборот) кол-во рациональных произведений уменьшится. т.к. было $25 \cdot 25 = 625$, где И·И и ~~Р·И~~ $25 \cdot 25 = 625$, где Р·Р, если же поменять (а) иррац. на (а) рацион. (или наоборот)),
то мы получим $(25+a)(25-a) = 625 - a^2$
$\Rightarrow$ по 25 иррац и 25 рацион. ~~в~~ около строк и аналогично около столбцов даст максимальное возможное кол-во рациональных произведений.

Ответ: 1250.

Задание №6.

Пусть k_1 – первое написанное число $\Rightarrow$ k_1 – это сумма квадратов чисел, которые были записаны изначально. Т.к. каждое ~~квадр~~ новое число равно сумме квадратов предыдущих

$\Rightarrow k_n = k_{n-1}^2 + k_{n-1}$

квадрат предыдущего — сумма квадратов всех остальных чисел.

$\Rightarrow k_n = k_{n-1}(k_{n-1}+1) = k_{n-2}(k_{n-2}+1)(k_{n-1}+1) =$

$= k_{n-3}(k_{n-3}+1)(k_{n-2}+1)(k_{n-1}+1)\ldots$

Т.к. $k_1 > 0$ (равен сумме квадратов натуральных чисел) ~~и~~, и к каждому новому положительному числу мы прибавляем ~~другое~~ квадрат этого числа $\Rightarrow$, что все $k_{(n)}$ различны.

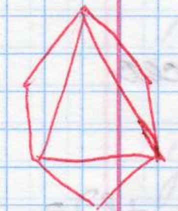
$\Rightarrow k_{100} = k_1 \cdot (k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_{99}+1)$

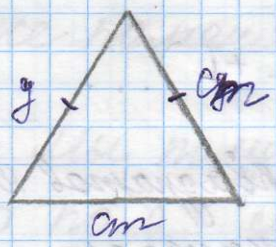
$\Rightarrow$, ~~что~~ сотое дорисованное число имеет хотя бы сто различных простых делителей.

Почему различных и именно простых?

Задание 7

Начнём рассматривать многоугольник с случайного треугольника, который может состоять из диагонали и двух сторон (I случай) или из двух диагоналей (II случай). или из трёх



1) 

1.1. сторона = ~~с~~стороне
=> существует 2 равные.

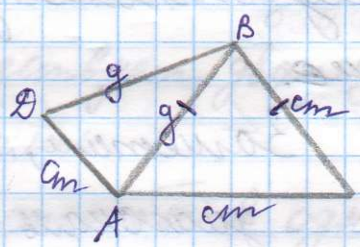
1.2. диагональ = стороне.

Заметим, что диагональ может образовывать новый треугольник ~~либо~~ с другой диагональю и стороной (1) или с двумя другими сторонами (2)

или с ~~двумя~~ другими диагоналями (3)

(при этом второй вариант обязательно произойдёт, т. к. фигура замкнута).

1.2.1.



1.2.1.1

В △ ABD (новая)

диагональ AB = AD

=> есть 2 равные стороны.

1.2.1.2.

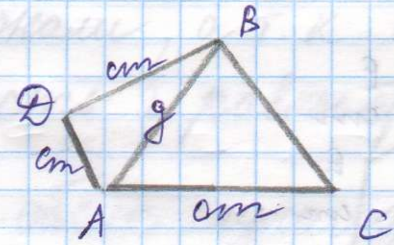
Диагональ AB равна ~~новой~~ другой диагонали BD

=> Возврат 1.2 (т.к. BD = AB => BD = AC) или (3)

т.к. многоугольник замкнутый

обязателен случай

1.2.2



Диагональ AB равна

одной из сторон (кроме

BD и AD) из 1.2.1.2.

=> в △ ABD либо AD = BD,

либо одна из сторон равна AB => равна

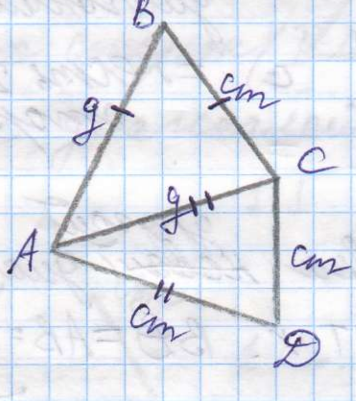
другой стороне многоугольника.

=> ~~Во 1.2~~. В первом случае всегда

есть две равны стороны.

Рассмотрим второй случай.

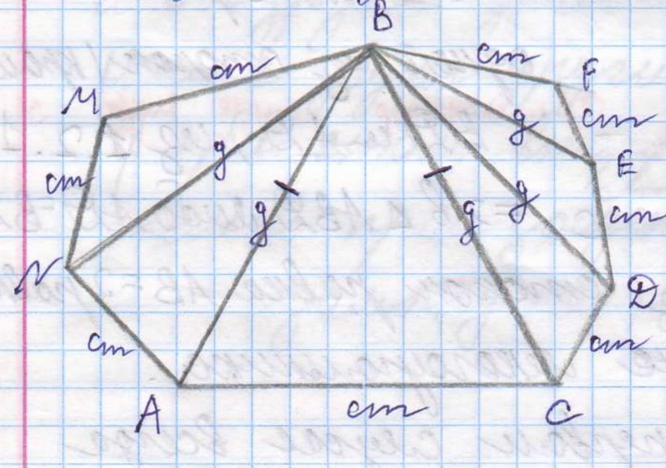
2.1. Пусть в треугольнике диагональ равна стороне.



Заметим, что диагональ ≠ стороне может лежать на вершинах двух соседних сторон.

При этом △ABC можно рассмотреть аналогично ~~первому~~ случаю 1.2.

2.2. Пусть диагональ = диагонали.



Заметим, что можно
построить бесконечно много
треугольников из двух диагоналей с стороны,
но существует два из двух сторон и
диагонали

Если хотя бы в одном треугольнике (д-д-ст)
диагональ = стороне, то аналогично
случаю 2.1 => все диагонали равны
между собой

Рассмотрим ΔMBN и ΔBFE, в которых
одна сторона равна другой (хотя бы
в одном из них) => есть 2 равные, либо
в обоих одна из сторон равна
диагонали, а т. к. все диагонали равны
=> есть 2 равные стороны.

=> В обоих случаях есть две равные
стороны.

Задание 8.

$$\angle XBQ = 180^\circ - \angle BXQ - \angle BQX$$

$$\angle QBP = \frac{1}{2} \cup PQ$$

$$\angle YBP = 180 - \angle BYP - \angle YPB$$

$$= \Rightarrow \angle XBY + \angle PBQ =$$